7. <u>ILGALAIKĖS SKOLOS APTARNAVIMAS</u>

7.1. Skolos aptarnavimo kaštai

Kiekybiškai tiriant ilgalaikės skolos (paskolos) grąžinimą, išskiriame tris etapus:

1) visiškas paskolos subalansavimas, t.y. jos parametrų ir finansinio susitarimo sąlygų adekvatumo pasiekimas;

2) paskolos vertės nustatymas bet kuriam jos egzistavimo momentui, atsižvelgiant į visas ateities pajamas - įplaukas ir rinkos galimybes investavimo momentu;

3) finansinės operacijos pelningumo (efektyvumo) kreditoriui nustatymas.

Detaliai aptarkime pirmąjį atvejį.

Paskolos parametrai subalansuojami, sudarant paskolos padengimo planą, kuriame numatomos periodinės skolos grąžinimo išmokos. Tas išlaidas įprasta vadinti skolos aptarnavimu (debt service). Periodinės išlaidos susideda iš pagrindinės skolos dengimo - vienkartinio mokėjimo ir periodinio palūkanų mokėjimo. Periodiniai mokėjimai gali aprėpti tik palūkanų mokėjimą, tačiau gali aprėpti ir pagrindinės skolos padengimą. Metodai, kuriais nustatomas periodinių mokėjimų dydis, priklauso nuo paskolos ir skolinimosi sąlygų. Šios sąlygos numato pagrindinės skolos grąžinimo laiką, lengvatinio periodo trukmę (grace period), palūkanų dydį, pagrindinės skolos grąžinimo ir procentų išmokėjimo būdus. Procentai paprastai mokami per visą paskolos egzistavimo periodą, nors kartais yra kaupiami ir mokami kartu su pagrindine skola. Pagrindinė skola paprastai grąžinama dalimis - lygiais arba besikeičiančiais terminuotais mokėjimais, retkarčiais visa - periodo pabaigoje. per lengvatinį periodą pagrindinė skola nemokama, tačiau palūkanos mokamos, nors kartais ir prijungiamos prie pagrindinės skolos. Pažymėkime:

D - skolos dydis;

I - palūkanos už paskolą;

L - lengvatinio periodo trukmė;

R - metinės pagrindinės skolos dengimo išlaidos;

g - palūkanų norma;

Y - periodinis mokėjimas.

Laikotarpiu, kai mokama ir pagrindinė skolos suma, periodinio mokėjimo dydis $Y=I+R$, lengvatiniu periodu - $Y = I$.

I ir R vertinimo metodai priklauso nuo paskolos tipo. Panagrinėkime tuos tipus. Svarbiausias tipizacijos požymis - tai skolos grąžinimo būdas. Pagal šį požymį galima išskirti:

1) paskolas, nereikalaujančias būtino skolos grąžinimo (pvz. neterminuotos obligacijos). Besiskolinantis (paprastai valstybė) įsipareigoja kreditoriui nustatytais laiko momentais mokėti fiksuotas palūkanas. Pasiskolinta suma negrąžinama. Kartu skolininkas pasilieka sau teisę išpirkti (padengti) visas skolas bet kuriuo metu. Tokį skolinį galima laikyti amžinu;

2) visa paskola grąžinama per vieną kartą. Skolininkas sutartu laiku grąžina visą pagrindinę skolą, taip pat periodiškai arba laikotarpio pabaigoje moka procentus;

3) paskola grąžinama per keletą kartų. Skolininkas grąžina paskolą dalimis ir nuolat moka mokestį už paskolą procentais.

Toliau panagrinėsime metodus kaip parengti skolų grąžinimo planus.

7.2. Fondo formavimas

Jeigu pagal paskolos sąlygas skolininkas tam tikru momentu turi grąžinti vienkartinį mokestį, tai jis turi tokią sumą sukaupti. Jei sumos didelės, reikia sudaryti vadinamąjį padengimo fondą (sinking fund). Tai kartais netgi fiksuojama skolos sutartyje. Šis fondas sudaromas nuolatiniais įnašais (tarkime, banko sąskaitoje), kuriems priskaitomos palūkanos. Be to, reikia stebėti, kad sukauptos sumos pakaktų numatytiems išmokėjimams atlikti. Suprantama, fondai kaupiami ne tik skolai sumokėti, o skaičiavimo metodai lieka tie patys.

Padengimo fondo planavimas (pastoviais mokėjimais). Svarbiausias paskolos grąžinimo plano sudarymo tikslas - mokėjimų ir fondų apimties bei laiko nustatymas pagal skolos padengimo poreikį.

Tegul padengimo lėšos kaupiamos reguliariais kasmetiniais mokėjimais *R* apimtyje, kuriems priskaičiuojamos *i* dydžio sudėtingos palūkanos. Kartu atliekamas procentų mokėjimas priskaičiuojamas pagal palūkanų norma *g*. Taigi periodinių mokėjimų turi būti sumokėta

$$\mathrm{Y} = \mathrm{D} \times \mathrm{g} + \mathrm{R}. \qquad (7.1)$$

Kadangi grąžinimo-padengimo fondas turi būti sukauptas per *N* metų - jį galima sutapatinti su renta, turinčia parametrus *R*, *N*, *i*. Kadangi sukaupta suma turi būti lygi paskolos dydžiui *D*, turėsime:

$$D = R \times s_{N;i} \qquad \text{arba} \qquad R = D/s_{N;i}\,.$$

Taigi: $$Y = Dg + D/s_{N;i} = D(g + 1/s_{N;i}). \qquad (7.2)$$

Jeigu finansinio kontrakto sąlygos numato vietoj periodiško palūkanų išmokėjimo prijungti jas prie pagrindinės skolos grąžinimo, tuomet pagal rentos formulę turėsime

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{s_{N;i}} \tag{7.3}$$

kur n yra bendras paskolos laikas, $n = N + 1$.

7.1 pavyzdys. 100 tūkst. litų paskola su 10% metinėmis palūkanomis suteikta penkeriems metams. Už suformuotą padengimo fondą priskaičiuojama 11% metinių palūkanų. Kokios turi būti kasmetinės skolininko išlaidos (periodiniai mokėjimai)?

Tegul padengimo fondas pradedamas formuoti tik gavus paskolą ir kasmet mokant vienodą įmoką. Kasmetinę įmoką galima įvertinti pagal rentos skaičiavimo formulę, kai:

$D = 100000$, $g = 10\%$, $i = 11\%$, $n = N = 5$, $s_{5;11} = 6.228$.

Jeigu įmokos mokamos kasmet, tai terminuota metinė įmoka bus lygi:

$$Y = 100000 \times 0.1 + \frac{100000}{6.228} = 26.057 \text{ tūkst. Lt.}$$

Jeigu numatoma procentus ir pagrindinės skolos dalį mokėti kartu, tuomet:

$$Y = \frac{100000 \times 1.1^5}{6.228} = 25.860 \text{ tūkst. Lt.} \qquad [1]$$

Taigi, esant $g<i$, skolininkas į banko sąskaitą įmoka mažiau, negu jam reikia išmokėti už paskolą.

Formuojant padengimo fondą, egzistuoja dvi palūkanų normos: i ir g. Pirmoji (i) apibūdina padengimo fondo augimo greitį, antroji (g) apibūdina sumą procentų, išmokamų už skolą. Nesunku suvokti, kad, esant sąlygai $g<i$, geresnė yra skolininko padėtis.

Sukauptas per t metų fondo sumas galima skaičiuoti pagal rentos akumuliuotos sumos formulę (žr.4.2 formulę) arba rekurentinę formulę

$$S_{t+1} = S_t \cdot (1 + i) + R. \tag{7.4}$$

7.2 pavyzdys. Tarkime, kad turime ***7.1 pavyzdžio*** *sąlygas*. Tegul dabar fondas formuojamas per pastaruosius ketverius metus. Todėl pirmaisiais metais reikia sumokėti tik priskaičiuotus procentus. Taigi turėsime, kad:

$$R = \frac{100000}{s_{4;11}} = \frac{100000}{4.7097} = 21232.8 \text{ Lt.}$$

Fondo formavimą galima pailiustruoti 7.1 lentele.

Fondo formavimas

7.1 lentelė

Metai	Palūkanų mokėjimas	Įnašai į dengimo fondą	Skolos aptarnavimo išlaidos	Sukaupta metų pabaigai
1	10000	-	10000	-
2	10000	21232.8	31232.8	31232.8
3	10000	21232.8	31232.8	44801
4	10000	21232.8	31232.8	70962
5	10000	21232.8	31232.8	100000

[2]

<u>7.3 pavyzdys</u>. Padarykime dar vieną pataisą ***7.1 pavyzdžio*** *sąlygose*: padengimo įmokos mokamos kiekvieno mėnesio pabaigoje, t.y. p=12. Procentai kreditoriui išmokami kasmet. Tuomet kasmetinė įmokėjimo suma bus:

$$R = \frac{100000}{s_{5;11}^{(12)}} = \frac{100000}{3.879} = 25782 \text{ Lt}.$$

Kiekvieno mėnesio įmoka - 2148 litai. Taigi skolos aptarnavimo mokesčiai bus:

– kiekvieno mėnesio pabaigoje: Y=2148 litai, (išskyrus paskutinį periodinių metų mėnesį),

– kiekvienų metų pabaigoje: Y=10000+2148=12148 Lt. [3]

Kaip viena pateikto metodo panaudojimo galimybių yra amortizacinio fondo formavimas. Supaprastintai fondo formavimas suprantamas kaip metiniai amortizaciniai atskaitymai, nustatomi dalijant objekto amortizuojamą vertę iš metų skaičiaus, per kuriuos turėtų tarnauti objektas. Tai paprasčiausias metodas. Tačiau jeigu amortizaciniai atskaitymai kaupiami, jie turi duoti procentus. Taigi tam tikram fondo dydžiui sukaupti rekia mažiau įnašų. Amortizacinių sumų nustatymo metodas, atsižvelgiantis į laiko faktorių, t.y. į priskaičiuotas palūkanas, vadinamas padengimo fondo metodu (sinking fund metod). Pagal jį amortizaciniai įnašai apskaičiuojami kaip pastovus rentos narys R:

$$R = \frac{W}{s_{N;i}}, \tag{7.5}$$

kur W - amortizuojama objekto pagrindinių fondų vertė.

Jeigu R pastovus dydis, tai objekto liekamoji vertė tolygiai mažėja. Suprantama, kad $R<R_t$, kur R_t - amortizaciniai atskaitymai, gaunami paprasčiausiu tiesiniu metodu.

<u>7.4 pavyzdys</u>. Pradinės 1.2 mln. litų vertės objekto likvidacinė vertė po 10 metų eksploatavimo bus 0.2 mln. litų. Reikia nustatyti metinius amortizacinius įnašus. Paprasčiausiu tiesiniu metodu tai būtų:

$$R_p = \frac{1200000 - 200000}{10} = 100000 \text{ Lt}.$$

Esant 10% palūkanų normai, anksčiau pateiktas metodas duoda:

$$R = \frac{1000000}{s_{10;10}} = \frac{1000000}{15.937} = 62745 \text{ Lt}.$$

Taigi matome, kad reikia gerokai mažesnių amortizacinių atskaitymų. [4]

<u>Padengimo fondų sudarymas, esant nevienodiems įnašams.</u> Skirtingi įnašai dažnai būna naudingesni negu pastovūs. Tuomet reikia naudotis kintamosios rentos instrumentarijumi. Tarkime, kad padengimo įnašai sudaro aritmetinę progresiją su skirtumu *a* ir pirmuoju nariu *R*. Sukaupta suma nustatoma pagal formulę:

$$S = R_1 \times s_{N;1} + a \times \frac{(1+i)^n - 1 - n \times i}{i^2}.$$

Taigi, spręsdami R_1 atžvilgiu ir vietoj *S* naudodami *D*, turėsime

$$R_1 = \frac{1}{s_{N;i}} \times \left(D - a \times \frac{(1+i)^n - 1 - n \times i}{i^2} \right). \qquad (7.5)$$

Numatant, kad padengimo įnašai turi mažėti pagal aritmetinę progresiją, (7.5) formulėje progresijos skirtumas įgaus neigiamą reikšmę.

Kadangi padengimo įnašai kinta pagal laiką, tai ir terminuoti įmokėjimai turi būti laiko funkcija:

$$Y = D_g + R_t, \qquad (7.6)$$

kur $R_t = R_1 + a(t - 1), \qquad t = 1, 2, ..., n.$

<u>7.5 pavyzdys</u>. Tarkime, kad įnašai į padengimo fondą pakliūna metų pabaigoje per penkerių metų laikotarpį. Tegul mokėjimai kasmet padidėja 500 litų. Reikia sudaryti padengimo fondo formavimo planą, jeigu turime 10 tūkst. litų paskolą.

Nustatykime pirmąjį įnašą R_1, jeigu už fonde besikaupiančias lėšas priskaičiuojamos 10% palūkanos:

$$R_1 = \frac{1}{6.1051} \times \left(10000 - \frac{500(1.1^5 - 1 - (5 \times 0.1))}{0.1^2} \right) = 732.87 \text{ Lt}.$$

Iš čia $R_t = 732.87 + 500\ (t - 1)$, $t = 1, 2, 3, 4, 5$. Jeigu skolininkas dar moka metinį, sakykime 9.5% palūkanų mokestį, tai turėsime sekančią mokėjimų lentelę:

Padengimo fondo formavimo planas

7.2 lentelė

Metai	Procentinė įmoka	Įnašai į fondą	Paskolos padengimo išlaidos	Sukaupta metų pabaigai
1	950	732.87	1682.87	732.87
2	950	1232.87	2182.87	2039.03
3	950	1732.87	2682.87	3975.80
4	950	2232.87	3182.87	6606.25
5	950	2732.87	3682.87	9999.75

Jeigu pateiktame pavyzdyje įnašai į fondą sudaro mažėjančią aritmetinę progresiją (kai a = -500), tai pirmas įnašas bus lygus:

$$R_1 = \frac{1}{6.1051} \times \left(10000 + 500 \times \frac{1.1^5 - 1 - (5 \times 0.1)}{0.1^2} \right) = 2543.04 \text{ Lt}. \qquad [5]$$

Toliau panagrinėkime atvejus, kai mokami įnašai didėja geometrine progresija. Tuomet sukaupta rentos suma S nustatoma pagal formulę:

$$S = R_1 \times \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)},$$

kur q - geometrinės progresijos rodiklis,

R_1 - pirmasis rentos narys.

Tad jeigu paskolos dydis $D=S$, tai:

$$R_1 = D \times \frac{q - (1+i)}{q^n - (1+i)^n}. \qquad (7.7)$$

<u>7.6 pavyzdys</u>. Skola - 100 tūkst. litų, procentinis mokestis sudaro 0.055, o padengimo įnašai per visus penkerius metus didės 10%. Reikia rasti pirmojo įnašo dydį, sudaryto fondo formavimo planą, jeigu už fondo lėšas gaunama 6% palūkanų:

$$R_1 = 100000 \times \frac{1.1 - 1.06}{1.1^5 - 1.06^5} = 14690.52.$$

Fondo formavimo planas

7.3 lentelė

Metai	Procentinė įmoka	Įnašai į fondą	Paskolos padengimo išlaidos	Sukaupta metų pabaigai

1	5500	14690.52	20190.52	14690.52
2	5500	16159.57	21650.57	31731.52
3	5500	17775.53	23275.53	51410.94
4	5500	19553.08	25053.08	74048.68
5	5500	21508.39	27008.39	100000

[6]

7.3. Skolos apmokėjimas išsklaidant pagal laiką

Praktiškai dažnai skola padengiama laiko bėgyje išsklaidytais mokėjimais (ne įmokėjimais į fondą, o grąžinimais skolintojui). Skola dalimis apmokama įvairiais būdais: lygiomis sumomis, lygiais ir kintamais periodiniais mokėjimais.

Skolos padengimas lygiomis sumomis. Tegul *D* dydžio skola grąžinama per *n* metų tolygiai. Tuomet kasmet teks grąžinti *D/n*. Be to, skolininkas turi mokėti procentus už likusią skolos dalį. Tarkime, kad procentai mokami kartą per metus, metų pabaigoje. Tuomet pirmas palūkanų mokėjimas bus lygus *Dg*, antras - *(D-D/n)g*, trečias - *(D-*2*D/n)g* ir t.t. Taip kasmet išmokami procentai sudaro mažėjančią aritmetinę progresiją, kurios pirmasis narys bus lygus *Dg*, o skirtumas bus lygus -*Dg/n*. Periodinis mokėjimas taip pat bus mažėjanti aritmetinė progresija, kurios pirmasis narys bus *D/n+Dg*, o skirtumas taip pat lygus -*Dg/n*. Periodiniai mokėjimai bus:

$$Y_1 = D(1/n + g);\ Y_2 = D(1/n + g) - D \times g/n \ \text{ ir t.t.}$$

Bendras narys gali būti nustatomas pagal šią formulę:

$$Y_t = D_t \times g + d, \tag{7.8}$$

kur D_t - skolos likutis t metų pradžiai.

$$d = \frac{D_1}{n} \qquad (D_1 \text{ - pradinis skolos dydis}).$$

$$D_{t+1} = D_t \times \frac{n-1}{n},\ t = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n. \tag{7.9}$$

Jeigu skola mokama *p* kartų per metus ir tokiu pat dažnumu mokamos palūkanos, tai periodinis mokėjimas sudarys:

$$Y_t = \frac{D_t g}{p} + \frac{D_1}{pn},$$

o skolos likutis periodo pradžiai bus:

$$D_{t+1} = D_t \times \frac{n \times p - 1}{n \times p}, \; t = 1, \; 2, \; \ldots, \; np. \tag{7.10}$$

7.7 pavyzdys. Tarkime, kad 100 tūkst. litų skolą reikia sumokėti lygiomis dalimis per penkerius metus, mokant metų pabaigoje. Už skolą dar mokamas 5% mokestis.

Taigi pagrindinės skolos padengimo suma bus $\frac{100000}{5} = 20000\,Lt$.

Kasmetinės procentinės įmokos:

pirmaisiais metais $100000 \times 0.05 = 5000$,

antraisiais metais $(100000 - 20000) \times 0.05 = 4000$ ir t.t.

Padengimo procesą ir planą patogiausia pavaizduoti lentelėje.

Skolos padengimo planas

7.4 lentelė

Metai	**Skolos likutis metų pradžiai**	**Skolos padengimo suma**	**Procentinė įmoka**	**Periodinė įmoka**
1	100000	20000	5000	25000
2	80000	20000	4000	24000
3	60000	20000	3000	23000
4	40000	20000	2000	22000
5	20000	20000	1000	21000

Tarkime, kad skolos padengimo mokesčiai mokami kiekvieną ketvirtį. Mokėsime 20 ketvirčių. Taigi skolos likutis kiekvieną ketvirtį sumažėjo $100000/4 \times 5=5000$ litų. Procentinė įmoka bus:

$100000\times0.05/4=1250$ Lt; $(100000 - 5000)\times0.05/4=1187$ Lt; ...; $(100000 - 95000)\times0.05/4=62$ Lt (dalijame iš keturių todėl, nes jeigu metinė palūkanų norma lygi 5%, tai ketvirtinė - 1.25%). Galima sudaryti tokią lentelę:

Skolos padengimo planas

7.4a lentelė

Metai	**Skolos liekana metų pradžiai**	**Skolos padengimo suma**	**Procentinė įmoka**	**Periodinė įmoka**
1	100000	5000	1250	25000
2	95000	5000	1187.5	24000
3	90000	5000	------	------
---	------	------	------	------

19	10000	5000	------	------
20	5000	5000	62.5	5062.5

[7]

Pastaba. Paskolos sąlygose gali būti numatytas lengvatinis periodas, kurio metu nereikia grąžinti skolos, mokant tuo metu procentus arba didinant pagrindinės skolos dydį. Pirmuoju atveju lengvatiniame periode mokami tik procentai, o antruoju - pagrindinė skola didinama iki dydžio D_1 $(1 + q)^L$,

kur L - lengvatinio periodo trukmė.

Anksčiau išnagrinėto metodo privalumas - jo paprastumas. Tačiau reikia prisiminti, o gal būt ir aptarti finansinio kontrakto sąlygose, kad periodiniai mokėjimai periodo pradžioje yra didesni negu jo pabaigoje.

Lygūs terminuoti mokėjimai. Šis metodas leidžia nustatyti pastovų terminuotų mokėjimų dydį, kurį reikia mokėti per visą periodą. Suprantama, kad dalis šio mokesčio yra procentinis mokestis, o dalis - skolos padengimas. Kadangi mokame vienodus terminuotus mokėjimus, o procentinės įmokos tolydžio mažėja, tai mokėjimai, skirti skolai padengti, didėja. Turime:

$$Y = D_t \times g + R_t = const,$$

kur D_t - skolos likutis t periodo pradžiai.

Skolos padengimo planas gali būti rengiamas dviem atvejams:

a) kai nustatytas skolos padengimo terminas,

b) kai nustatytas terminuoto mokėjimo dydis.

Panagrinėkime abu atvejus.

Nustatytas skolos padengimo terminas *n*. Pirmiausia nustatome periodinio mokėjimo dydi Y. Toliau šis dydis išskaidomas procentams apmokėti ir skolai padengti.

Patovūs periodiniai mokėjimai gali būti nagrinėjami kaip pastovi renta. Tardami, kad skolos pradinis dydis lygus rentos sumai, turėsime:

$$Y = \frac{D_1}{a_{n;g}} \qquad (7.11)$$

kur $a_{n;\,g}$ - rentos redukavimo (dikontavimo) koeficientas, kai palūkanų norma - g.

Visus duomenis, reikalingus skolos padengimo planui parengti, galima išaiškinti analitiniu būdu, remiantis kontrakto prielaidomis. Pirmiausia suraskime pirmojo skolos padengimo mokesčio apimtį d_1. Pagal apibrėžimą turime:

$$d_1 = Y - D_1 \times g.$$

Kadangi $D_1 = Y \times a_{n;\,g}$,

tai $d_1 = Y(1 - g \times a_{n;\,g}) = Y \times v^n$ (7.12)

Atitinkamai mokėjimas *t* momentu bus lygus:

$$d_t = Y \cdot v^{n-(t-1)}, \tag{7.13}$$

kur $v = 1/1+g$.

Iš gautos formulės tiesiogiai seka, kad pagrindinės skolos padengimo mokesčiai sudaro eilutę:

$$d_1,\ d_1 \times (1 + g),\ d_1 \times (1 + g)^2,\ ...,\ d_1 \times (1 + g)^{n-1}.$$

Pagal (7.12) formulę rasime pirmojo padengimo mokesčio dydžio išraišką per skolos dydį

$$d_1 = Y \times v^n = \frac{D_1 - v^n}{a_{n;g}} = \frac{D_1}{s_{n;g}}. \tag{7.14}$$

Gautos formulės leidžia surasti rekurentinę priklausomybę skolos padengimo mokesčiui nustatyti:

$$d_t = Y - D_t \times g = d_{t-1} \times (1 + g), \quad t=1, 2, ..., n; \tag{7.15}$$

$$d_1 = Y - D_1 \times g = \frac{D_1}{s_{n;g}}.$$

Likutis *t* metų pradžioje:

$$D_{t+1} = D_t - d_t = D_t \times (1 + g) - Y. \tag{7.16}$$

Padengtos skolos suma iki *t* metų pradžios:

$$W_t = \sum_{k=1}^{t-1} d_1 (1+g)^k = d_1 \times s_{t-1;g}; \tag{7.17}$$

Padengtos skolos suma *t* metų pradžiai būtų:

$$W_t = d_1 \times s_{t-1;\,g}, \tag{7.17a}$$

kur $s_{t-1;\,g}$ - pastovios metinės rentos kaupimo koeficientas per (t - 1) metus.

(7.17) formulė taikoma tada, kai nesiekiama detalaus skolos padengimo plano sudarymo.

7.8 pavyzdys. Tarkime, kad 100 tūkst. litų skolą reikia padengti lygiomis dalimis per 5 metus, mokant metų pabaigoje. Už skolą mokamos 5% palūkanos. Skola padengiama kaip pastovi metinė renta, kuri pasižymi tokiais parametrais: Y - ieškomas periodinio mokėjimo dydis, $n = 5$, g = 5%, $a_{5;5} = 4.329$. Pagal (7.11) formulę:

$$Y = \frac{100000}{4.329} = 23097.87 \text{ Lt},$$

$$d_1 = 23097.48 - 100000\ 0.05 = 18097.48 \text{ Lt},$$

$$D_2 = 100000 - 18097.48 = 81902.52 \text{ Lt, ir t.t.}$$

Padengimo sumas d_2, d_3, ... tinkamiausia skaičiuoti pagal (7.15) rekurentinę formulę: $d_2 = 18097.48 \times 1.05 = 19002.35$ ir t.t. Skolos padengimo planą galima pateikti 7.5 lentelėje.

Skolos padengimo planas

7.5 lentelė

Metai	Skolos likutis metų pradžiai	Periodinė įmoka	Procentinė įmoka	Skolos padengimo suma
1	100000.0	23097.48	5000.0	18097.48
2	81902.52	23097.48	4095.13	19002.35
3	62900.17	23097.48	3195.01	19952.47
4	42947.70	23097.48	2147.30	20950.10
5	21997.60	23097.48	1099.88	21997.60
				10000

[8]

<u>7.9 pavyzdys.</u> Tarkime, kad reikia surasti padengtos skolos dydį ketvirtųjų skolos grąžinimo metų pradžiai, nagrinėjant ***7.8 pavyzdyje*** aprašytą situaciją.

Pasinaudojome (7.17) formule: $W_4 = d_1 \times s_{3;5}$. Kadangi $d_1 = 18097$, o $s_{3;5} = 3.1525$, tai turėsime:

$$W_4 = 57052.3 \text{ Lt.}$$ [9]

Iš principo jokių pokyčių skaičiavimuose neįvyks, jeigu skolos padengimo ir palūkanų įmokas atliksime ne vieną, o p kartų per metus. Tačiau skolininko padėtis gerokai pablogės, kadangi realiai panaudota palūkanų norma padidins nominalią palūkanų normą. Jeigu padengimo įmokos ir palūkanos įmokamos p kartų per metus, tai periodinis mokėjimas bus:

$$\frac{Y}{p} = \frac{D_1}{a_{np;g/p}}, \tag{7.18}$$

kur Y - periodinis (visų metų) mokestis;

$a_{np;\ g/p}$ - paprastos rentos, kai įmokos ir procentai priskaičiuojami p kartų per metus - diskontavimo koeficientas;

g - nominali palūkanų norma.

Skolos padengimo dydis susmulkintame periode bus

$$d_t = \frac{y}{p} - \frac{D_t \times g}{p}, \tag{7.19}$$

kur t - įmokos eilės numeris, t=1, 2, ..., np.

Skolos likutis periodo pradžiai apskaičiuojamas pagal formulę:

$$D_{t+1} = D_t - d_t\ , \tag{7.20}$$

Padengtos skolos suma periodo pradžiai bus:

$$W_t = D_t - D_{t-1} = d_1 \cdot s_{t-1;\ g/p}, \tag{7.21}$$

kur $s_{t-1;\ g/p}$, - rentos kaupimo koeficientas su periodu t-1 ir palūkanų norma - g/p.

7.10 pavyzdys. Tegul procentai mokami ir skolos padengiama ne kartą, o du kartus per metus.

Tuomet p = 2, g/p = 0.025, $a_{10;\ 25}$ = 8.75. Pagal (4.18) formulę randame, kad:

$$\frac{Y}{2} = \frac{100000}{8.75} = 11426 \text{ Lt.}$$

Iš čia d_1 = 11426 - 100000 × 0.025 = 8926 Lt,

D_2 = 100000 - 8926 = 91074 Lt ir t.t.

Skolos padengimo planas parodytas 7.6 lentelėje.

Matome, kad procentinių mokesčių suma mažėja (nuo 2500 iki 278.68 lito už pusmetį), o pagrindinės skolos įmokos didėja (nuo 8925.88 iki 11147.20 lito).

Skolos padengimo planas

7.6 lentelė

Pusmečio numeris	Skolos likutis pusmečio pradžiai	Periodinis mokestis už pusmetį	Procentinė įmoka už pusmetį	Skolos padengimo suma
1	100000	11426	2500	8925
2	91074	11426	2277	9149
3	81925	11426	2048	9378
4	75547	11426	1814	9612
5	62935	11426	1573	9852
6	53082	11426	1327	10098

7	42984	11426	1074	10351
8	32632	11426	816	10610
9	22022	11426	550	10875
10	11147	11426	278	11147
				100000

[10]

<u>Nustatytas periodinis mokestis</u>. Pirmasis skolos padengimo plano etapas - nustatyti skolos padengimo trukmę *n*. Kai randame *n*, tuomet padengimo planas rengiamas įprasta tvarka: pagal skolos dydį nustatome mokamų palūkanų sumą, o skirtumas tarp periodinio mokesčio ir palūkanų lieka pagrindinei skolai padengti.

Kasmetinės pagrindinės skolos padengimo dydis nustatomas pagal (7.15) formulę, o skolos likutis periodo pradžiai pagal (7.16) formulę, padengtos skolos apimtis metų pradžiai - pagal (7.17) formulę.

Skolos padengimo arba adekvačios rentos trukmė *n* nustatoma taip:

$$n = -\frac{ln(1 - D_1 \times g / Y)}{ln(1 + g)}. \quad (7.22)$$

Suprantama, kad sprendinys egzistuoja tik tada, kai

$$D_1 \times \frac{g}{Y} < 1.$$

Kadangi rentos trukmės *n* vertinimas paprastai būna trupmeninis, tai imame [*n*]. Skolos likutis kompensuojamas kitu būdu. Pavyzdžiui, kitame periode įmokant kartu su procentais.

<u>7.11 pavyzdys</u>. Skola - 100 tūkst. litų. Palūkanų norma - 8%. Jeigu per *S* periodą nustatytos 20 tūkst. litų periodinės įmokos, tai tuomet:

D_1 = 100000 Lt, Y = 20000 Lt, g = 0.08 ir pagal (7.22) formulę:

$$n = -\frac{ln\left(1 - 100000 \times \frac{0.08}{20000}\right)}{ln 1.08} = 6.637 \text{ metų}.$$

Tokiu būdu, esant 20 tūkst. litų periodinėms įmokoms, skola gali būti sumokėta per septynerius metus. Pirmuosius šešerius metus mokama po 20 tūkst. litų, o septintųjų metų pabaigoje - išmokama likusi skolos dalis ir atitinkami procentai. Skolos padengimo planas pateiktas 7.7 lentelėje.

Skolos padengimo planas

7.7 lentelė

Metai	Skolos likutis metų pradžiai	Periodinė įmoka	Procentinė įmoka	Padengtos skolos suma
1	100000	20000	8000	12000
2	88000	20000	7040	12960
3	75040	20000	6003	13997
4	61043	20000	4883	15117
5	45926	20000	3674	16326
6	29600	20000	2368	17632
7	11968	12926	958	11968
				100000

[11]

Jeigu padengimo įmokos ir priskaičiuojami procentai įmokami *p* kartų per metus, tai skolos trukmė - mokėjimų periodų skaičius bus nustatomas taip:

$$n \times p = -\frac{ln(1 - D_1 \times g / Y)}{ln(1 + g / p)} . \qquad (7.23)$$

Skolos padengimo dydis nustatomas pagal (7.19) formulę, skolos likutis periodo pradžiai pagal (7.20) formulę, o padengtos skolos suma pagal (7.21) formulę.

Suformuoto uždavinio sprendimą galima pradėti pasirenkant pirmojo skolos padengimo periodo įmoką - d_1. Tuomet galima nustatyti *n:*

$$n = \frac{ln(D_1 \times g / d_1 + 1)}{ln(1 + g)} . \qquad (7.24)$$

Jeigu, sakykime, nustatyta padengimo dalis f, t.y. jeigu $f = d_1 / D_1$, tuomet:

$$n = \frac{ln(g / f + 1)}{ln(1 + g)} . \qquad (7.25)$$

Skolos padengimo planas nagrinėjamu atveju sudaromas pagal standartinę schemą:

pirmiausia *nustatomos padengimo įmokos*:

d_n, $d_1 (1 + g)$, $d_1 (1 + g)^2$, ...,

toliau - *procentai likusiai skolai*:

$D_1 \times g$, $D_2 \times g$, ...,

ir pagaliau - *periodinės įmokos*:

Y_1, Y_2, ...;

7.12 pavyzdys. Skola - 100 tūkst. litų, g = 8%. Reikia nustatyti skolos padengimo planą, jeigu pirmoji padengimo įmoka lygi 5 tūkst. litų, o periodinės įmokos pastovios.

Remdamiesi (4.24) formule turėsime:

$$n = \frac{ln\left(100000 \times \frac{0.08}{5000} + 1\right)}{ln 1.08} = \frac{ln 2.6}{ln 1.08} = 12.43 \text{ metų.}$$

Apvalindami gauname, kad n=12. Procentinių įmokų dydis pirmaisiais metais bus lygus 8 tūkst. litų, o periodinė įmoka - 13 tūkst. litų. Padengimo įmokos pagal (7.13) formulę bus: 5000; $5000 \times 1.08 = 5400$; $500 \times 01.08^2 = 5832$;...;$5000 \times 1.08^{12-1} = 11658$.

Procentinių įmokų eilutė atrodys taip: 8000; 7600;...; 1341.

Pratęskime skaičiavimus ir suraskime paskutinio - 13 padengimo mokesčio dydį. Tam reikia surasti pirmųjų dvylikos padengimų sumą:

$$W_{12} = 5000 \times s_{12;8} = 5000 \times \frac{1.08^{12} - 1}{0.08} = 94886 \text{ Lt.}$$

Taigi skolos likutis tryliktojo periodo pradžiai bus: 100000 - 34886 = 5114 Lt, kurį ir turime padengti paskutinį periodą kartų su reikiamu procentu. [12]

<u>Kintamos periodinės įmokos</u>. Dėl įvairių priežasčių ne visuomet naudinga laikytis pastovių periodinių įmokų sekos. Todėl dažnai pasirenkama, kad periodinės įmokos turėtų paklūsti kokiam nors dėsningumui (progresijai, eksponentei ir pan.) arba tiesiog būna nustatytos.

Tegul periodinių įmokų seka Y_1, Y_2,...,Y_n sudaro geometrinę progresiją su vardikliu q. Ją galima užrašyti Y, $Y \times q$, $Y \times q^2$, ..., $Y \times q^{n-1}$. Prilygindami rentos, sudarytos iš periodinių įmokų, sumą redukuotai rentos reikšmei, turėsime:

$$Y_1 = D_1 \times \frac{q - (1+g)}{\left(\frac{q}{1+g}\right)^n - 1}, \tag{7.26}$$

kur q - pasirinktas įmokų didėjimo tempas.

Padengimo planas sudaromas tokiu pat nuoseklumu, kaip ir pastovioms įmokoms:

1) surandamas dydis, lygus procentinei įmokai,
2) likusi pradinės įmokos dalis tampa padengimo įmoka.

7.13 pavyzdys. Tegul įmokos skolai padengti kasmet mažėja 10%, skolos padengimo trukmė - penkeri metai, pradinė (pirminė) skola - 100 tūkst. litų, palūkanų norma lygi 6%. Pagal sąlygą $D_1 = 100000$, n = 5, g = 0.06, q = 0.9. Pirma periodinė įmoka pagal (7.26) formulę bus:

$$Y_1 = 100000 \times \frac{0.9 - 1.06}{\left(\frac{0.9}{1.06}\right)^5 - 1} = 28635 \text{ Lt.}$$

Procentinė įmoka pirmaisiais metais bus lygi 100000 × 0.06=6000 Lt. Skolos padengimo įmoka pirmaisiais metais - 28635 - 6000=22635 Lt. Skolos likutis antrųjų metų pradžiai - 100000 - 22635=77365 Lt. Antroji periodinė įmoka - 28635 × 0.9=21130 Lt.

Skolos padengimo planas pateiktas 7.8 lentelėje.

Skolos padengimo planas

7.8 lentelė

Metai	Skolos likutis metų pradžiai	Procentinė įmoka	Periodinė įmoka	Padengtos skolos suma
1	100000	6000	28635	22635
2	77365	4642	25772	21130
3	56235	3374	23195	19820
4	36414	2185	20875	18690
5	17724	1063	18788	17724
				100000

[13]

Jeigu skolos kontrakte numatyta p-kartinis padengimas ir procentų mokėjimas, tai pirmoji periodinė įmoka bus:

$$Y_1 = D_1 \times \frac{q - (1 + g/p)}{\left(\frac{q}{1 + g/p}\right)^{np} - 1}, \quad (7.27)$$

(7.27) formulėje nustatyta, kad kiekvieną kartą skolos likučiui priskaičiuojama *g/p* procentinių mokesčių.

Kaip buvo minėta, kartais periodinės įmokos tiesiog nustatomos iš anksto: Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}, Y_n, suprantama, automatiškai nusako pirmųjų Y_{n-1} įmokų apimtį ir skolos dydį. Skolos padengimo planas pateiktas 7.9 lentelėje, nustačius, kad įmokos daromos kasmet.

Skolos padengimo plano schema (Y_1, ..., Y_n - numatyti)

4.9 lentelė

Metai	Skola metų pradžiai	Periodinė įmoka	Procentinė įmoka	Skolos padengimo įmoka	Skola padengimo pabaigai
1	D_1	Y_1	$D_1 \times g$	$Y_1 - D_1 \times g$	$D_1 \times (1+g) - Y_1$

2	D_2	Y_2	$D_2 \times g$	$Y_2 - D_2 \times g$	$D_2 \times (1+g) - Y_2$
---	----	----	----	-------	------
n	D_n	Y_n	$D_n \times g$	$Y_n - D_n \times g$	$D_n \times (1+g) - Y_n = 0$

7.14 pavyzdys. Skola - 10 tūkst. litų, palūkanų norma - 6%. Periodiniai mokėjimai atitinkamai 4, 2, 3, 1 tūkst. litų. Skolos trukmė - ketveri metai. Sudarome skolos padengimo planą (7.10 lentelė).

Skolos padengimo planas

7.10 lentelė

Metai	Skolos likutis metų pradžiai	Periodinė įmoka	Procentinė įmoka	Padengimo įmoka	Skola metų pabaigai
1	10000	4000	600.00	3400.00	6600
2	6600	2000	396.00	1604.00	4996
3	4996	3000	299.76	2700.24	2295.76
4	2295.76	2433	137.75	2295.76	0

[14]

7.4. Vartotojiškas kreditas

Viena iš problemų, atsirandančių planuojant skolos padengimą, yra skolos likučio bet kuriam laiko momentui apskaičiavimas. Anksčiau nagrinėjome šių problemų sprendimą, kai skola buvo grąžinama iš anksto nustatytomis dalimis. Tad ir skolos procentinių išmokų skaičiavimas buvo akivaizdus: skaičiavome kaip procentą nuo likusios skolos. Kitaip šią problemą reikia spręsti vartotojiškame kredite, kai procentai skaičiuojami tolygiai. Priminsime, kad šie procentai priskaičiuojami visai kredito sumai ir įsiskolinimo suma tolygiai mokama per visą kredito laikotarpį.

Tegul skola su priskaičiuotinais per n metų procentais bus lygi S. Jeigu skola mokama p kartų per metus, tai kiekvieną kartą bus sumokama $Y = S/ p \times n$. Jeigu vartosime anksčiau įvestus terminus, tai Y yra periodinė įmoka arba skolos aptarnavimo suma. Kyla klausimas, kaip padalyti Y tarp procentinių įmokų ir pagrindinės skolos padengimo įmokų. Sprendimas gana specifinis. Jam įvykdyti naudojama vadinamoji "78 taisyklė". Norėdami paaiškinti minėtąją taisyklę, panagrinėkime dalinį atvejį, kada kreditas išduodamas vieneriems metams ir jį reikia mokėti kiekvieną mėnesį. Pats taisyklės pavadinimas kilęs iš to fakto, kad mėnesių eilės numerių suma per metus (1+2+...+12=78) lygi 78. Pagal šią taisyklę pirmoje įmokoje mokama 12/78 visų priskaičiuotų procentų sumos dalis, likusi periodinės įmokos dalis skiriama pagrindinei skolai apmokėti. Antrojoje įmokoje apmokama 11/78 dalis priskaičiuotų procentų, o likusi periodinės įmokos dalis skiriama pagrindinei skolai apmokėti. Tokiu būdu procentinė įmoka sudaro mažėjančią aritmetinę progresiją, taigi vykdomas pagreitintas procentų padengimas.

Apibendrinkime šią taisyklę *n* metų ir p mokėjimų per metus atveju. Tuomet mokėjimo periodų eilės numeriai atvirkščia tvarka atrodys taip: $t=p \times n$; $p \times n$ - 1, $p \times n$ - 2, ..., 1, 0. Šių numerių suma bus lygi:

$$Q = \sum_{t=1}^{p\times n} t = p \times n \times \frac{p \times n + 1}{2} \tag{7.28}$$

Taigi kiekviename mokėjime bus padengiama t/ Q bendros procentų dalies. Absoliučiu dydžiu tai bus lygu:

$$R_1 = \frac{t}{Q} \times D \times i \times n,$$

$$R_2 = Y - R_1 = Y - \frac{t}{Q} \times D \times i \times n,$$

kur D - pradinis skolos dydis,

i - palūkanų norma,

n - skolos trukmė,

R_1 - priskaičiuotų procentų dalis,

R_2 - įmokos dalis, skirta pagrindinei skolai padengti.

Apskaičiuokime padengtos skolos apimtį iki *k-to* periodo pabaigos:

$$W_k = Y_k - \sum_{t-1}^{k} t \times \frac{D \times i \times n}{Q}, \tag{7.29}$$

kur W - padengtos skolos apimtis *k-to* periodo pabaigoje,

Y_k - periodinių įmokų suma iki *k-to* periodo pabaigos.

Savo ruožtu, mėnesių numerių suma Σt intervale nuo t = 1 iki t = k, lygi:

$$\sum_{t=1}^{k} t = k \times \left(p \times n - \frac{k-1}{2} \right). \tag{7.30}$$

7.15 pavyzdys. 10 tūkst. litų kreditas išduotas trejiems metams, priskaičiuojant kiekvienais metais po 3% metinių palūkanų (nuo pradinės sumos, lygios 10 tūkst. litų). Taigi bendra skolos suma bus $S = D\,(1 + n \times i) = 10000 \times 1.3 = 13000$ Lt. Kreditas padengiamas kiekvieną mėnesį.

Taigi periodiniai mėnesiniai išmokėjimai bus lygūs:

$$Y = \frac{13000}{36} = 361.11 \text{ Lt.}$$

O priskaičiuotų procentų suma lygi 3 tūkst. litų. Pagal uždavinio sąlygas p=12, n=3. Taigi $n \times p$=36. Todėl t=36, 35, ..., 1, ir šių skaičių suma bus lygi 666. Vadinasi per pirmąjį periodą bus apmokėta 36/666 dalis visų priskaičiuotų procentų, t.y. 162.61 lito. Skirtumas 366.11-162.61=198.95 skiriamas pagrindinei skolai padengti. 7.11 lentelėje pateiktas skolos padengimo planas.

Skolos padengimo planas

7.11 lentelė

Periodas (mėnuo)	Skolos likutis mėnesio pradžiai	Palūkanų suma	Pagrindinės skolos padengimo apimtis	Periodinė įmoka
1	10000	162	199	361
2	9801	158	203	361
3	9597	153	208	361
--	---	---	---	---
15	6805	99	262	361
16	6543	95	266	361
--	---	---	---	---
35	708	9	352	361
36	357	5	356	361

Matome, kad procentinės įmokos sparčiai mažėja, o pagrindinės skolos padengimo įmokos didėja.

Suraskime, pavyzdžiui, padengtos skolos sumą 12-to ir 18-to mėnesių pabaigai: W_{12} = 2685, W_{18} = 3622.

Taigi po trečdalio laiko skola padengta tik 26.8%, o po pusės - tik 36.2%. Atkreipkime dėmesį į tai, kad jeigu skola būtų mokama procentus priskaičiuojant nuo likusios skolos dalies, tai tokia amortizacija skolininkui būtų gerokai pigesnė, nes procentai priskaičiuojami tik nuo likusios sumos. Pavyzdžiui, jeigu skolą aptarnautume lygiomis periodinėmis įmokomis, tai pagal (7.18) formulę gautume, kad:

$$Y = \frac{10000}{a_{36;10/12}} = \frac{10000}{30.9912} = 322.62 \text{ Lt.}$$

Taigi periodinė įmoka būtų gerokai pigesnė, taip pat ir procentinė įmoka pirmaisiais metais būtų lygi 10000 × 0.1/12=83.33 Lt, o padengimo įmoka - 322.67 - 83.33=239.39 Lt.

[15]

Periodinių mokėjimų dydį galima apskaičiuoti ir kitu, paprastesniu būdu. Tada priimame, kad procentai bus mokamis per visą laikotarpį vienodomis sumomis. Šiuo atveju periodinės įmokos paskirstomos tarp priskaičiuotų procentų ir įmokosskolai padengti bus atliekamos taip:

$$Y = R_1 + R_2 = \frac{P \times i}{m} + \frac{P}{n \times m};$$

P - pagrindinės skolos suma (be procentų), t.y. prekės kaina;

R_1 - priskaičiuotų precentų dalis;

R_2 - dengiamoji įmoka;

n - kredito trukmė metais;

m - procentų mokėjimo skaičius per metus.

Beja, šių skaičiavimų metodo parinkimas skolininkui turi įtakos tik tuo atveju, jeigu jam reikia sumokėti skolą anksčiau numatyto laiko.