4. MOKĖJIMŲ SRAUTŲ ANALIZĖ

4.1. *Mokėjimų srautai ir finansinės rentos*

Įvairiuose kontraktuose, sandoriuose, gamybinėse ir ūkinėse operacijose dažniausiai susiduriama ne su vienkartiniais mokėjimais, o su daugybe pagal laiką pasiskirsčiusių išmokų ir įplaukų. Pavyzdžiui, ilgalaikio kredito ar kitų skolų padengimas, kredito gavimas, piniginiai investicinio proceso srautai ir kt. Tai yra laike pasiskirsčiusių išmokų ir įplaukų eilutės. Užsienio finansinėje literatūroje tokias eilutes arba jų atskiras dalis įprasta vadinti mokėjimų srautais (cash flows). Mokėjimų srauto nariai gali būti tiek teigiami (įplaukos), tiek ir neigiami (išmokos).

Mokėjimų srautą, kurio visi nariai teigiami, o laiko tarpai tarp visų mokėjimų yra lygūs, įprasta vadinti finansine renta arba anuitetu, nepriklausomai nuo mokėjimų kilmės ir tikslo. Pavyzdžiui, procentų mokėjimas už obligacijas, įnašai kreditui padengti arba draudimo fondui sudaryti ir pan. Mokėjimų srautų tipizavimas įgalina panaudoti standartines jų skaičiavimo formules.

Finansinė renta (arba tiesiog renta) apibrėžiama tokiais parametrais:

– rentos narys (rent) - tai kiekvieno mokėjimo apimtis,
– rentos periodas - tai laiko tarp dviejų mokėjimų intervalas,
– rentos trukmė - tai laikotarpis nuo rentos pradžios iki pabaigos,
– palūkanų norma - procentai, kuriais kuapiami mokėjimai,
– diskontavimo norma - procentai, kuriais diskontuojami mokėjimai.

Finansinėms rentoms apibūdinti tenka pasinaudoti ir tokiais parametrais, kaip mokėjimų skaičius per metus, palūkanų priskaičiavimo skaičius, mokėjimų momentai laiko bėgyje ir kt.

Finansinių rentų tipai. Rentų klasifikavimo pagrindu pasirenkami gana įvairūs požymiai. Priklausomai nuo mokėjimų periodo trukmės, rentos skirstomos į metines ir p-kartinines (p - mokėjimų skaičius per metus). Investicinių procesų aprašyme, kaip ir kituose skaičiavimuose, naudojamos rentos, kurių mokėjimo periodas viršija vienerius metus. Paprastai rentos yra diskretinės. Tačiau dažnai mokėjimų būna tiek daug, kad skaičiavimus patogiau atlikti į rentą žiūrint kaip į tolydinį mokėjimų srautą (tolydinė renta). Procentai gali būti priskaičiuojami vieną kartą per metus, m kartų per metus arba tolygiai per visą laikotarpį.

Pagal rentos narių dydį rentos skirstomos į pastovias ir kintančias. Kintančios rentos nariai keičiasi laiko bėgyje dažnai paklusdami kokiam nors dėsningumui: aritmetinei progresijai, geometrinei progresijai ir panašiai arba nesistemingai.

Pagal mokėjimų patikimumą rentos skirstomos į garantuotas (annuity certain) ir atsitiktines (contingent annuity). Garantuotos rentos - tai būtinai įvykdomi mokėjimai, pavyzdžiui, kredito padengimas ir kt. Atsitiktinių rentų mokėjimai būna susiję su tam tikru atsitiktiniu veiksniu ar įvykiu, todėl mokėjimų dydis ar skaičius iš anksto nėra žinomi. Tokios rentos - tai pensijų išmokėjimų skaičius ir suma, kompensacijų ir draudimo kontraktų sumos ir pan.

Pagal narių skaičių rentos skirstomos į baigtines ir begalines (amžinas). Begalinės (amžinos) rentos kategorija yra artima daugybei gyvenimo realijų. Pavyzdžiui, palūkanų išmokėjimai pagal neterminuotas obligacijas ir pan.

Pagal rentos laiko pradžios ir tokio svarbaus laiko momento kaip kontrakto įsigaliojimo (arba kitų momentų) rentos skirstomos į tiesiogines ir atidėtas. Tiesioginių rentų laikotarpis prasideda iš karto po kontrakto pasirašymo. Atidėtų rentų laikotarpis prasideda vėliau, negu įsigalioja kontraktas.

Pakankamai svarbi rentų klasifikacijos savybė yra rentos periodo momentas, kuriuo atliekami mokėjimai. Jeigu mokama periodo pabaigoje, tai tokios rentos vadinamos paprastomis arba postumerando. Jeigu mokėjimai atliekami periodo pradžioje, tokios rentos vadinamos prenumerando. Praktikoje dažniausiai naudojamos paprastos rentos. Nors kartais naudojamos ir rentos, kada mokėjimai atliekami periodo viduryje.

Pateiksime pavyzdį. Turime kontraktą, pagal kurį kreditas padengiamas kas pusmetį tiksliai nustatytu laiku, o palūkanos skaičiuojamos kas pusmetį. Tai pusmetinė garantuota renta. Jeigu pirmas mokėjimas bus atliekamas po dvejų metų - tai bus atidėta renta.

Mokėjimų srautus apibendrinantys rodikliai. Daugiausia finansiniuose-ekonominiuose skaičiavimuose naudojamas vienas iš dviejų apibendrinančių rodiklių: sukaupta (akumuliuota) suma ir dabartinė (redukuota) vertė.

Sukaupta suma (amount of an annuity) - tai suma visų mokėjimų, įskaitant priskaičiuotas palūkanas iki rentos laikotarpio pabaigos. Dabartinė mokėjimų srauto vertė (present value) suprantama kaip suma visų srauto narių, diskontuotų mokėjimų pradžios arba būsimajam momentui.

Sukaupta suma paprastai parodo bendrą skolos ir investicijų apimtį, piniginio fondo apimtį, sukauptą iki įvertinamojo momento ir pan. Dabartinė mokėjimų srauto vertė apibūdina atitinkamai dabartines sąnaudas, kapitalizuotas pajamas, grynąjį dabartinį pelną. Apibendrinantys rentos rodikliai plačiai naudojami įvairiuose finansiniuose skaičiavimuose ir metodiniuose apibendrinimuose. Kaip svarbius pavyzdžius galima nurodyti skolos aptarnavimo planų sudarymą, kontraktų sąlygų palyginimą, bei jų pakeitimą nepatiriant nuostolių, investicijų efektyvumo įvertinimą ir pan.

Šioje dalyje panagrinėsime baigtines rentas, kurių nariai laiko bėgyje išlieka pastovūs (pastovios rentos), kada mokėjimai atliekami kartą ar p kartų per metus arba po n metų (periodų pabaigoje), o palūkanos pridedamos kartą ar m kartų per metus arba priskaičiuojamos tolygiai.

4.2. Sukaupta (sukaupta) paprastos rentos suma

<u>Metinė renta</u>. Panagrinėkime paprasčiausią metinės rentos atvejį. Tegul per ketverius metus kiekvienų metų pabaigoje į banką įmokama po 1000 litų, palūkanų norma yra 5% ir jos priskaičiuojamos metų pabaigoje. Sukaupta rentos suma laikotarpio pabaigoje bus lygi:

$$1000 \times 1.05^3 + 1000 \times 1.05^2 + 1000 \times 1.05 + 1000 .$$

Pabandykime tai pateikti apibendrintai. Įveskime šiuos žymėjimus:

S - sukaupta rentos suma;

R - rentos nario dydis;

i - palūkanų norma;

n - rentos laikotarpis (metais).

Tuomet turėsime:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \qquad (4.1)$$

Įrodymas: $S = R + Rq + \ldots + Rq^{n-1}$.

$$\frac{Sq = Rq + \ldots + Rq^n}{S(q-1) = R(1+q^n)};$$

$$S = R\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Tolesniuose vertinimuose įveskime vadinamąjį rentos kaupimo koeficientą $s_{n;i}$:

$$s_{n;i} = \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (4.2)$$

Dabar (4.1) formulę galime perrašyti taip:

$$S_{n;i} = R \cdot s_{n;i}. \qquad (4.3)$$

Kiekvienas skaičiavimų paketas paprastai turi $s_{n;i}$. skaičiavimo programą. Konkretūs $s_{n;i}$ dydžiai skirtingoms n ir i vertėms yra pateikiami lentelėse.

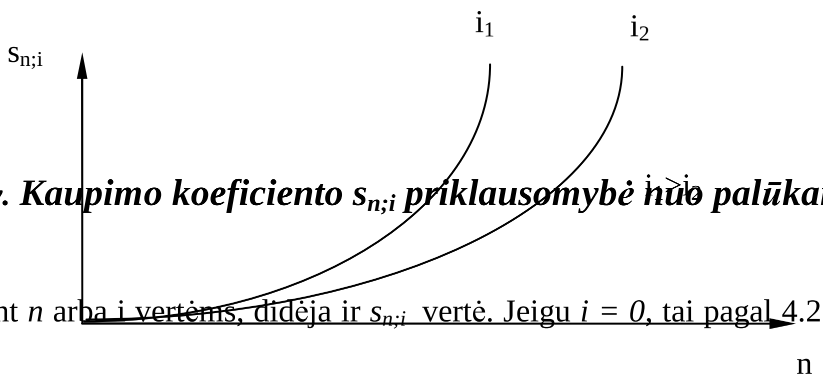
4.1 pavyzdys. Sudaromas fondas į kurį 10 metų bėgyje, kiekvienų metų pabaigoje bus inešama po 40000 litų, palūkanų norma i = 10%. Reikia rasti, kokio dydžio bus fondas laikotarpio pabaigoje.

$$S_{10;10}=40000 \times s_{10;10} = 40000 \times 15.94 = 637497.00 \text{ Lt};$$

o jeigu R = 40000 litų, i = 12%, n = 10, tuomet

$$S_{10;12}= 40000 \times (1.12^{10}- 1) / 0.12 = 701949.00 \text{ Lt} \qquad [1]$$

Kaupimo koeficientas $s_{n;i}$ priklauso nuo dviejų parametrų n ir i ir grafiškai ši priklausomybė atrodo taip:



4.1 pav. Kaupimo koeficiento $s_{n;i}$ priklausomybė nuo palūkanų normos i.

Didėjant n arba i vertėms, didėja ir $s_{n;i}$ vertė. Jeigu $i = 0$, tai pagal 4.2 formulę $s_{n;i} = n$, o $S = R \times n$.

<u>Metinė renta, kai palūkanos pridedamos *m* kartų per metus</u>. Tarkime, kad dabar kiekvieną kartą pridedama j/m palūkanų, kur j yra nominali metinė palūkanų norma. Kaip jau buvo parodyta anksčiau, rentos nariai su priskaičiuotais jiems procentais sudaro tam tikrą eilę: paskutiniam įnašui procentai nepriskaičiuojami, priešpaskutiniam įnašui priskaičiuojama $(1 + j / m)^m$ procentų ir t.t. Užrašę visus rentos narius su priskaičiuotais procentais atvirkščia tvarka, gauname, kad sukaupta suma lygi:

$$S=R + R(1 + j/m)^m + R(1 + j/m)^{m2} + ... + R(1 +j/m)^{m(n - 2)} + R(1 + j/m)^{m(n - 1)}.$$

Taigi, turime augančią geometrinę progresiją, kurios pirmasis narys lygus R, o vardiklis - $(1 + j/m)^m$.

Sukaupta rentos suma $s_{nm;j/m}$ bus lygi:

$$S_{[nm;j/m]} = R\frac{(1+j/m)^{nm}-1}{(1+j/m)^m-1} \qquad (4.4)$$

<u>4.2 pavyzdys</u>. Turime prieš tai pateiktą rentos tipą, tik dabar palūkanos pridedamos keturis kartus per metus (ketvirčio pabaigoje). Taigi m = 4; nm = 40; j/m = 0,12/4 = 0,03.

Pasinaudodami (4.4) formule turėsime:

$$S_{[40;0.03]} = 40000\frac{1.03^{40}-1}{1.03^4-1} = 40000 \times 18.023 = 720\ 918\ Lt. \qquad [2]$$

Pastaba. Kaip matome, priskaičiuojant palūkanas kiekvieną ketvirtį, sukaupta suma žymiai padidėjo. Tai atsitinka todėl, kadangi palūkanų norma mažinama netiksliai, kad būtų galima gauti tą pačią sumą, o imama lygi *j/m*. Suprantama, kad šis didėjimas nėra begalinis, nes $\lim_{m\to\infty}(1+j/m)^m = e^j$ yra baigtinis.

Daugiklis (4.4) formulėje skiriasi nuo $s_{n;i}$, todėl, norėdami pasinaudoti daugiklio $s_{n;i}$ vertėmis iš lentelės, (4.4) formulę padauginsime iš *j/m* ir ją išskirsime į dvi dalis:

$$S_{[nm;j/m]} = \frac{(1+j/m)^{nm}-1}{(1+j/m)^m-1} = \frac{\dfrac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}}{\dfrac{(1+j/m)^m-1}{j/m}}. \qquad (4.5)$$

Taigi: $S_{[nm;j/m]} = \dfrac{s_{mn;j/m}}{s_{m;j/m}}$;

kur: $$S_{[nm;j/m]} = \frac{(1+j/m)^{nm}-1}{j/m} \qquad (4.6)$$

ir $$S_{[m;j/m]} = \frac{(1+j/m)^m-1}{j/m} \qquad (4.7)$$

<u>4.3 pavyzdys</u>. Norėdami surasti ***4.2 pavyzdžio*** *duomenims* reikalingą koeficientą, pasinaudosime atatinkamų koeficientų lentelių vertėmis:

$$\frac{s_{40;3}}{s_{4.3}} = \frac{75.40}{4.18} = 18.023. \qquad [3]$$

<u>P-kartinė renta (*m = 1*)</u>. Suraskime sukauptą sumą tuo atveju, jeigu renta mokama *p* kartų per metus, o procentai pridedami tik vieną kartą (*m = 1*) periodo pabaigoje Jeigu metinė mokėjimų suma yra *R*, tai kiekvieną kartą reikia mokėti *R/p*. Tuomet mokėjimų eilutė sudarys geometrinę progresiją* (čia parašyta atvirkščia tvarka):

$$\frac{R}{p};\frac{R}{p}(1+i)^{1/p};\ldots\frac{R}{p}(1+i)^{1/p\times np-1}.$$

Taigi, sukaupta rentos suma $S^{(p)}{}_{n;i}$ bus:

$$S^{(p)}{}_{n;i}=\frac{R}{p}\times\frac{(1+i)^{1/p\times np}-1}{(1+i)^{1/p}-1}=R\frac{1}{p}\times\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1}. \tag{4.8}$$

O rentos kaupimo koeficientas bus:

$$S^{(p)}{}_{n;i}=\frac{1}{p}\times\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1}. \tag{4.9}$$

P-kartinė renta ($p = m$). Tai vienas iš paprastesnių skaičiavimo atvejų, kai mokėjimų skaičius per metus lygus p ir palūkanos priskaičiuojamos m kartų per metus, t.y. p=m. Sukauptos rentos sumos S formulei išvesti reikia (4.1) ir (4.4) formules pritaikyti rentos eilutei:

$$\frac{R}{m};\frac{R}{m}(1+j/m);\frac{R}{m}(1+j/m)^{2};\ldots;\frac{R}{m}(1+j/m)^{nm-1}.$$

Pritaikę minėtas formules gausime:

$$S=\frac{R}{m}\times\frac{(1+j/m)^{nm}-1}{(1+j/m)-1}=\frac{R}{m}\times s_{nm;j/m}. \tag{4.10}$$

P-kartinė renta ($p \neq m$). Dabar pabandykime rasti rentos sukauptos sumos skaičiavimo formulę bendriausiuoju atveju: kai p kartų mokamas įnašas ir m kartų pridedamos palūkanos, o m nelygus p. Tokia renta vadinama bendrąja renta.

Pirmasis rentos narys lygus R/p ir įmokėtas po $1/p$ metų nuo rentos pradžios. Priskaičius visus procentus, rentos pabaigoje jis bus lygus:

$$\frac{R}{p}(1+j/m)^{nm-m/p}.$$

Antrasis narys bus lygus:

$$\frac{R}{p}(1+j/m)^{nm-2m/p}.$$

ir t.t. Matome, kad gauti dydžiai sudaro (jeigu užrašysime juos atvirkščia eile) geometrinę progresiją, kurios pirmasis narys lygus R/p, vardiklis $(1 + j/m)^{m/p}$, o narių skaičius lygus np. Taigi sukaupta suma bus:

$$S=\frac{R}{p}\times\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}=R\times\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p((1+j/m)^{m/p}-1)}. \tag{4.11}$$

arba $$S = \frac{R}{p} \times \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j/m} \times \frac{j/m}{(1+j/m)^{m/p} - 1}. \qquad (4.11a)$$

Kaip matome, antrasis (4.11a) daugiklis yra $s_{mn;j/m}$, o trečiasis, jeigu *m/p* yra sveikas skaičius, lygus $s^{-1}{}_{m/p;j/m}$. Tada turėsime, kad:

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{s_{mn;j/m}}{s_{m/p;j/m}}. \qquad (4.12)$$

<u>4.4 pavyzdys</u>. Rezerviniam fondui sudaryti kiekvienais metais skiriama po 4 tūkst. litų. Akumuliuojamoms lėšoms priskaičiuojamos 6% palūkanos. Reikia surasti sukauptą fondo sumą po penkerių metų:

a) įmokėjimai mokami metų pabaigoje, palūkanos priskaičiuojamos kas pusmetį;

b) įmokėjimai mokami ketvirčio pabaigoje, palūkanos priskaičiuojamos kas pusmetį;

c) įmokėjimai mokami ir palūkanos priskaičiuojamos kiekvieną ketvirtį.

Taigi, pagal jau įvestus žymėjimus ir duotas sąlygas turėsime: R=4000, n=5, i=j=0,06:

a) čia m = 2, j/m = 0,03, $s_{10;3}$ = 11,5; $s_{2;3}$ = 2,03. Taigi pagal (4.5) formulę turėsime:

$$S = 4000\frac{11.5}{2.03} = 22589\ Lt;$$

b) čia p = 4, m = 2, j/m = 0,03. Kadangi m/p<1, todėl negalima naudotis lentelių $s_{n;i}$ vertėmis. Pagal (4.11) formulę turėsime:

$$S = 4000\frac{1.03^{10} - 1}{4(1.03^{2/4} - 1)} = 23098\ Lt;$$

c) čia p = m = 4, j/m = 0,015, $s_{20;1,5}$ = 23,1. Taigi:

$$S = 4000 \times \frac{32.1}{4} = 23124\ Lt. \qquad [4]$$

<u>Tolydinė renta (tolydinis palūkanų priskaičiavimas)</u>. Tegul įmokos atliekamos diskretiškai, tačiau palūkanos priskaičiuojamos <u>tolydžiai (tolydžiai)</u>. Tuomet reikia prisiminti, kad tuo atveju turėjome

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = e^{jn}$$ ir <u>kaupimo koeficientą</u> pažymėjome - $e^{\delta n}$.

Tarp diskretinio atvejo palūkanų normos i ir jos pagrindu generuoto tolydinio atvejo palūkanų normos δ yra nustatytas toks ryšys:

$$(1 + i) = e^{\delta}, \text{ iš čia } \delta = ln\,(1 + i). \qquad (A)$$

1 pastaba. Pastaroji lygybė bus ekvivalentiška, kai, tarkime, sukaupta suma tiek diskretiniu, tiek ir tolydiniu atveju bus lygi

$$R \times s_{n;i} = R \times s_{n;\delta},$$

kur $s_{n;i}$ ir $s_{n;\delta}$ - rentos kaupimo koeficientai atitinkamai diskretiniam ir tolydiniam atvejui.

Dabar užrašykime (tik atvirkščia tvarka) visus atliktus mokėjimus su jiems priskaičiuotomis palūkanomis:

$$R;\ Re^{\delta};\ Re^{2\delta};\ldots;\ Re^{\delta(n-1)}.$$

Matome, kad tai geometrinė progresija. Taigi sukaupta rentos suma tolydiniu atveju bus lygi:

$$S = R \times s_{n;\delta} \tag{4.13}$$

kur kaupimo koeficientas $s_{n;\delta}$ lygus:

$$s_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}. \tag{4.14}$$

Analogiškai p-kartinei paprastai rentai turėtume:

$$S = R \times s^{(p)}{}_{n\delta}, \tag{4.15}$$

kur rentos kaupimo koeficientas $s^{(p)}{}_{n\delta;}$ lygus:

$$s^{(p)}{}_{n;\delta} = \frac{1}{p} \times \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta/p} - 1} = \frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)}. \tag{4.16}$$

2 pastaba. Sukauptos sumos diskretiniu ir tolydiniu atveju yra lygios, jeigu tarp parametrų galios (A) lygybė.

4.5 pavyzdys. Pagal kontraktą per penkerius metus turime kasmet įmokėti po 40 tūkst. litų. Reikia surasti sukauptą periodo pabaigai sumą, jeigu palūkanos priskaičiuojamos tolygiai, esant δ = 6%, ir:

a) įmokos mokamos vieną kartą per metus,

b) įmokos mokamos kas pusmetį,

c) įmokos mokamos kas ketvirtį.

Pagal (4.14) ir (4.16) formules turėsime:

a) $$s_{5,6} = \frac{e^{0.06 \times 5} - 1}{e^{0.06} - 1} = 5.6578,$$

b) $$s^{(2)}{}_{5,6} = \frac{1}{2} \times \frac{e^{0.06\times5} - 1}{e^{0.06\times1/2} - 1} = 5.7439,$$

c) $$s^{(4)}{}_{5,6} = \frac{1}{4} \times \frac{e^{0.06\times5} - 1}{e^{0.06\times1/4} - 1} = 5.7874.$$

Taigi, S_a = 226.31; S_b = 229.76 ir S_c = 231.49.

Užduotis. Tegul lieka tas pats kontraktas, tik palūkanos priskaičiuojamos tolygiai ir palūkanų normos nenumatysime iš anksto, o apskaičiuosime pagal metinę diskretinę normą, kuri lygi 6%. Tuomet:

$$\delta = ln\ (1 + 0.06) = ln\ 1.06 = 0.0583.$$

Dabar atitinkamos sukauptos sumos S_a, S_b ir S_c bus:

$$S_a = s_{5;5,83} \times R = 5.637 \times 400 = 223310\ Lt,$$

$$S_b = s^{(2)}{}_{5;5,83} \times R = 5.720 \times 400 = 228820\ Lt,$$

$$S_c = s^{(4)}{}_{5;5,83} \times R = 5.762 \times 400 = 230490\ Lt. \qquad [5]$$

Jeigu priskaičiuotume palūkanas pagal diskretinę normą i = 6%, gautume tokias pat sumas.

Paprastų metinių ir p-kartinių rentų sukauptų sumų palyginimas. Kaip matome iš 4.4 pavyzdžio, įmokėjimų ir palūkanų priskaičiavimo tvarka turi įtakos rentos sukauptos sumos dydžiui. Norėdami atlikti palyginimą, pažymėkime *S(p,m)* taip:

*S(*1,1) - paprasta metinė renta;

*S(*1,*m)* - paprasta renta, kai procentai priskaičiuojami m kartų;

S(p, ∞) - p-kartinė renta, kai procentai priskaičiuojami tolydžiai.

Esant vienodoms efektyviai *(i),* nominaliai *(j)* ir tolydinei (δ) palūkanų normoms *(i=j=δ),* turėsime:

$$S(1,\ 1) < \underset{m>1}{S(1,\ m)} < S(1,\ \infty) < \underset{p>1}{S(p,\ 1)} < \underset{p>m>1}{S(p,\ m)} < \underset{p=m>1}{S(p,\ m)} < \underset{1<p<m}{S(p,\ m)} < S(p,\ \infty).$$

Pateiktos nelygybės gali būti panaudotos pasirenkant kontrakto sąlygas, kadangi yra žinomi galutiniai rezultatai. Pavyzdžiui, žinome, kad S(2,4) > S(4,2) ir pan.

4.5 pavyzdys. Iliustracijai peržiūrėkime rentos, kuriai metinė įmoka lygi 10 tūkst. litų, palūkanų norma - 6%, rentos trukmė - 10 metų, sukauptų sumų lentelę:

Sukauptų sumų lentelė

4.1 lentelė

	m = 1	**m = 2**	**m = 4**	**m = 12**	**m = ∞**
p = 1	131810	132370	132650	132850	132850
p = 4	134740	135350	135670	135880	135990

(atlikti jautrumo analizę)

4.3. Dabartinė paprastos rentos vertė

Metinė renta. Dabartine mokėjimo srauto, tarp jo ir finansinės rentos verte laikoma suma visų tokio srauto narių, diskontuotų pradiniam laiko momentui. Šalia termino dabartinė vertė dar vartojami terminai kapitalizuota vertė, tikroji vertė. Kaip paaiškės vėliau, dabartinė vertė finansiniu požiūriu yra ekvivalentiška visų mokėjimų, kurie įeina į srautą, dabartinei vertei. Šis rodiklis praktiškai plačiai naudojamas atliekant ilgalaikės skolos padengimo skaičiavimus, įvertinant ir palyginant skirtingo pobūdžio finansinius įsipareigojimus arba įplaukas, investicijų efektyvumą, draudimo skaičiuotes ir pan. Teigiama, kad dabartinė mokėjimų srautų vertė yra vienas iš svarbiausių rodiklių, naudojamų kiekybiniuose finansiniuose skaičiavimuose. Gerai nesuprantant šios charakteristikos esmės bei jos matavimo metodų, sunkoka suprasti tokias praktiškai labai svarbias problemas, kaip finansinių-kreditinių operacijų, tame tarpe - investicijų operacijų efektyvumo matavimas, kontraktų sąlygų palyginimas ir pan. Daugybės finansinių ir komercinių problemų sprendimas vienaip ar kitaip siejasi su piniginių srautų (įplaukų) dabartinės vertės nustatymu.

Rentų dabartinės vertės nustatymą išnagrinėsime tokiu pat eiliškumu, kaip ir sukauptos sumos skaičiavimą. Pradėkime nuo paprastos metinės rentos, kurios narys $R = 1$, palūkanų norma - i, procentai, priskaičiuojami rentos periodų pabaigoje, rentos trukmė - n metų. Paprastai laikoma, kad nagrinėjamos rentos yra momentinio vyksmo, t.y. diskontavimo pradžia sutampa su rentos pradžia. Taigi mokėjimų eilutės, kurių kiekviena lygi vienetui, diskontavimas atliekamas pagal geometrinę progresiją ($v = 1/(1+i)$):

$$v = \frac{1}{(1+i)}\,;\, v^2 = \frac{1}{(1+i)^2}\,;\, v^3 = \frac{1}{(1+i)^3}\,;\ \ldots;\, v^n = \frac{1}{(1+i)^n}\,.$$

Randame šios eilutės sumą:

$$a_{n;i} = \sum_{t=1}^{n} v^t = \frac{v^{n+1}-v}{v-1} = \frac{v(v^n-1)}{v-1} = \frac{v^n-1}{1-1/v} = \frac{1-v^n}{-1/v+1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,. \qquad (4.17)$$

Koeficientas $a_{n;i}$ - vadinamas rentos diskontavimo koeficientu. Jis parodo, kiek kartų dabartinė rentos vertė didesnė už rentos narį. Koeficiento $a_{n;i}$ vertės paprastai skaičiuojamos kompiuteriais, be to, yra sudaromos lentelės.

Kadangi (4.17) formulė apibūdina rentą, kurios visi nariai lygūs 1, tai dabartinės analogiškos rentos, kurios visi nariai lygūs R, vertė bus:

$$A = R \times a_{n;i}. \tag{4.18}$$

Kad galima būtų atsekti priklausomybes tarp rentos įmokų eilutės ir sukauptos rentos sumos $S_{n;i}$ bei kaupimo koeficiento $s_{n;i}$ ir dabartinės rentos vertės $A_{n;i}$ bei rentos diskontavimo koeficiento $a_{n;i}$, patogiausia sugretinti P, S ir R eilutes bei jų sumas (P, S, R):

$$R;\ R;\ R;\ \ldots;\ R; \qquad \text{(P)}$$

$$R;\ R\,(1 + i);\ R\,(1 + i)^2;\ \ldots;\ R\,(1 + i)^{n-1}; \qquad \text{(S)}$$

$$\frac{R}{(1+i)};\ \frac{R}{(1+i)^2};\ \frac{R}{(1+i)^3};\ \ldots;\ \frac{R}{(1+i)^n}; \qquad \text{(P)}$$

$$R + R + R + \ldots + R = n \times R; \qquad \text{(R)}$$

$$R + R\,(1+ i) + R\,(1+ i)^2 + \ \ldots\ + R(1+i)^{n-1} = R \times \frac{1 - (1+ i)^{-n}}{i}; \qquad \text{(S)}$$

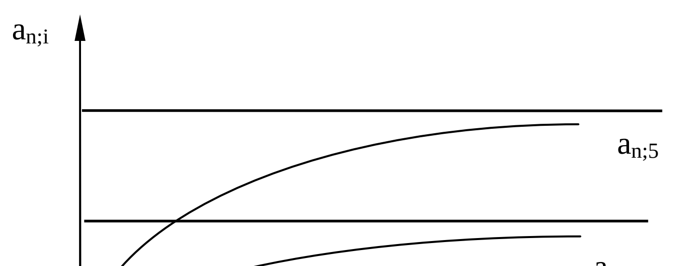
$$\frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n} = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad \text{(P)}$$

<u>4.6 pavyzdys</u>. Tegul renta bus mokama 10 metų po 500 litų kiekvienų metų pabaigoje, palūkanų norma - 6%. Reikia surasti dabartinę rentos vertę:

$$A = 500 \times \frac{1-(1+0.06)^{-10}}{0.06} = 3680.04\ Lt. \qquad [6]$$

Tą pačią sumą galime surasti ir tabuliuotose lentelėse, kai $a_{10;6} = 7.36$, A = 500 × 7,36 = 3680 Lt. Taigi visų ateityje įmokėtų 500 litų dabartinė suma įvertinama 3680 litų.

Iš 4.2 paveikslo matome kaip $a_{n;i}$ priklauso nuo i.



4.2 pav*. *Diskontavimo koeficiento $a_{n;i}$ priklausomybė nuo palūkanų normos i

Kai i=0, tai $a_{n;i}=n$; jeigu n=1, tai $a_{n;i}=v$. Jeigu rentos kaupimo koeficientas $s_{n;i}$ teoriškai nebuvo apribotas, kai n artėja į begalybę, tai rentos diskontavimo koeficientas yra apribotas:

$$a_{\infty;i}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-(1+i)^{-n})}{i}=\frac{1}{i}.$$

<u>Metinė renta, kai palūkanos priskaičiuojamos m kartų per metus</u>. Naudodamiesi (4.4) ir (4.17) formulių radimo logika, turėsime, kad minėtos rentos dabartinė vertė A bus lygi:

$$A=R\times\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1}. \tag{4.19}$$

(4.19) formulę galima pertvarkyti taip:

$$A=R\times\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m}\times\frac{j/m}{(1+j/m)^{m}-1}, \tag{4.19a}$$

arba
$$A=R\times\frac{a_{mn;j/m}}{s_{m;j/m}}. \tag{4.20}$$

<u>4.7 pavyzdys</u>. Tegul metinis rentos narys lygus 1000 litų, diskontuojama kiekvieno ketvirčio pabaigoje, nominali palūkanų norma - 10%, rentos trukmė - ketveri metai. reikia surasti dabartinę rentos vertę.

Kadangi $a_{16;2,5}$ = 13,055, o $s_{4;2,5}$ = 4,1525, tai

$$A=1000\times\frac{13.055}{4.1525}=3143.9\ Lt. \qquad [7]$$

<u>P-kartinės paprastos rentos, kai procentai priskaičiuojami vieną kartą per metus, dabartinė vertė</u> <u>(*m = 1*)</u>. Jeigu pagrindinės įmokos atliekamos p kartų per metus, o procentai priskaičiuojami vieną kartą per metus, tai taip pat, kaip paprastoms metinėms rentoms, diskontavimo koeficientai bus nustatomi taip:

$$a^{(p)}_{n;i}=\frac{1}{p}\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{((1+i)^{1/p}-1};\tag{4.21}$$

o dabartinė rentos vertė bus

$$A = R \times a^{(p)}{}_{n;i}\,. \tag{4.22}$$

4.8 pavyzdys. Viena JAV korporacija pasiūlė Indijos gamyklai, patyrusiai avariją, per 35 metus išmokėti 200 mln. USD kompensaciją, mokant ją kiekvieno mėnesio pabaigoje lygiomis dalimis. Tegul palūkanų norma yra 10% per metus. Reikia surasti dabartinę rentos vertę charakterizuojančią realų pasiūlytos kompensacijos dydį. Metinė įmoka sudarys 200 / 35 = 5.714 tūkst. USD.

$$A = 5.714 \times \frac{1 - 1.1^{-35}}{12(1.1^{1/12} - 1)} = 57.59\ mln.\ USD. \qquad [8]$$

Jeigu procentus priskaičiuotume m kartų per metus ir $m \neq p$, tuomet:

$$A = R \times a^{(p)}{}_{n;i}\,. \tag{4.22}$$

$$A = R \times a^{(p)}{}_{mn;j/m}\,. \tag{4.24}$$

Jeigu $m = p$, tai:

$$a^{(m)}{}_{mn;j/m} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m \times m} = \frac{a_{mn;j/m}}{m}\,. \tag{4.25}$$

4.9 pavyzdys. Pagal įsipareigojimą reikia per penkerius metus kasmet mokėti po 10 tūkst. litų. Kiek reikės turėti pinigų, kad kartu su priskaičiuotais procentais (nominali palūkanų norma j = 8%) reikiamu laiku padengtume numatytą sumą. Reikia surasti sprendimus tokiems atvejams:

a) pagrindinės įmokos mokamos kartą metų pabaigoje, palūkanos priskaičiuojamos kas pusmetį;

b) tiek pagrindinis mokestis, tiek ir procentai priskaičiuojami kiekvieną ketvirtį.

Aišku, kad uždavinio sprendimas adekvatus atitinkamų rentų dabartinių reikšmių nustatymui:

a) pagal sąlygą p=1, R=10000 Lt, n=5, j=0,08, m=2, $m \times n$=10. Pagal (4.19) ir (4.20) formules randame:

$$A = 10000 \times \frac{1 - 1.04^{-10}}{1.04^{2} - 1} = 38788\ Lt;.$$

arba $$A = 10000 \times \frac{a_{10;4}}{s_{2;4}} = 10000 \times \frac{7.91}{2.04} = 38788\ Lt.$$

b) šiam atvejui yra adekvati renta, kurios: $p=m$=4, R=10000 Lt, n=5, j=0.08, j/m=0.02, $m \times n$=20. Pagal (4.25) formulę turėsime:

$$A = 10000 \times \frac{a_{20;2}}{4} = 10000 \times \frac{16.35}{4} = 40878\ Lt.$$

arba $$A = 10000 \times \frac{1 - 1.02^{-20}}{0.08} = 40878\ Lt;.$$ [9]

<u>Rentų, kurioms palūkanos priskaičiuojamos tolydžiai, dabartinės vertės</u>. Rentos nariai, diskontuoti pagal tolydinę diskonto normą δ, sudaro tokią geometrinę progresiją:

$$R;\ Re^{-\delta};\ Re^{-2\delta};\ \ldots;\ Re^{-\delta(n-1)},$$

kurios dabartinę sumą A galime nustatyti pagal formulę:

$$A = R \cdot a_{n;\delta} \tag{4.26}$$

kur $a_{n;\delta}$ - diskontavimo koeficientas, nustatomas tokiu būdu:

$$a_{n;\delta} = \frac{1 - e^{\delta n}}{e^{\delta} - 1}; \tag{4.27}$$

p-kartinei rentai turėsime:

$$A = R \times a_{n;\delta}^{(p)}, \tag{4.28}$$

kur diskontavimo koeficientas $a_{n;\delta}^{(p)}$ nustatomas taip:

$$a_{n;\delta}^{(p)} = \frac{1 - e^{\delta n}}{p(e^{\delta/p} - 1)}. \tag{4.29}$$

<u>Paprastų metinių ir įvairaus tipo p-kartinių rentų dabartinių verčių palyginimas</u>. Rentos dabartinės vertės priklauso nuo to, kaip mokami pagrindiniai įnašai bei priskaičiuojamos palūkanos. Pabandykime palyginti atitinkamų rentų dabartines vertes. Panagrinėkime šiuos dabartinių verčių *A(p;m)* tipus:

$A(1;1)$ - kai yra paprasta metinė renta;

$A(p;\infty)$ - kai yra p-kartinė tolydinė renta;

$A(1;m)$ - kai yra paprasta metinė renta, kuriai palūkanos priskaičiuojamos m kartų per metus ir t.t.

Esant tapatiems metiniams mokėjimams, rentos trukmei bei palūkanų nominaliai, efektyviai ir tolydinei normoms *(j=m=c)*, turėsime:

$$A(1,\infty) < \underset{m>1}{A(1,m)} < A(1,1) < \underset{p>1}{A(p,\infty)} < \underset{p<m<1}{A(p,m)} < \underset{p=m>1}{A(p,m)} < \underset{1>p>m}{A(p,m)} < \underset{p>1}{A(p,1)}.$$

Gautos nelygybės gali būti panaudotos sudarant kontrakto sąlygas. Pavyzdžiui, vienodų pagrindinių įmokų ir vienodos trukmės rentai bus:

$$A(p=2;\ m=4) < A(p=4;\ m=2).$$

Rentai, kurios R=10 tūkst. litų, $n=10m$, $i=j=c$=6%, turėsime šias dabartinės vertes:

Dabartinės rentos vertės

4.2 lentelė

	m = 1	**m = 2**	**m = 4**	**m = 12**	**m = ∞**
p = 1	73600	73290	73130	73020	72960
p = 4	75240	74940	74790	74690	74640

<u>Priklausomybė tarp sukauptos rentos sumos ir dabartinės rentos vertės</u>. Dabartinė rentos vertė finansiniu požiūriu yra ekvivalentiška pačiai rentai. Tokiu būdu dabartinė rentos vertė yra tam tikros <u>rentos įvertinimas</u>, susietas su tam tikru laiko momentu (tiesioginėms rentoms - su rentos pradžios momentu). Sukaupta rentos suma taip pat reiškia tam tikrą rentos <u>įvertinimą (apibendrinimą)</u>, tiktai labiau siejamą su rentos pabaigos momentu. Intuityviai aišku, kad tarp šių dydžių turėtų būti funkcinis ryšys. Nesunku suvokti, kad jeigu *A* yra rentos įvertinimas jos pradžiai, o *S* - jos narių suma kartu su priskaičiuotais procentais, tai tų procentų priskaičiavimas dabartinėi vertei *A* turi duoti rentos sukauptą sumą *S*. Patikrinkime:

$$A(1+i)^n = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)^n = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S. \qquad (4.30)$$

Savo ruožtu: $$S \times v^n = A. \qquad (4.31)$$

Padalinę (3.30) ir (3.31) formules iš *R*, turėsime

$$a_{n;i}\,(1+i)^n = s_{n;i} \qquad (4.32)$$

ir $$s_{n;i}\, v^n = a_{n;i}\,. \qquad (4.33)$$

Analogiškas priklausomybes nesunku nustatyti ir naudojant kitus palūkanų priskaičiavimo ir diskontavimo metodus.

<u>4.10 pavyzdys</u>. ***4.9 pavyzdyje*** dabartinė rentos vertė lygi 38788 litams. Sukaupta rentos suma S bus lygi:

$$S = A(1 + j/m)^{mn} = 38788(1{,}04)^{10} = 57415\ Lt. \qquad [10]$$

4.4. Finansinių rentų parametrų nustatymas

Kaip matėme, mokėjimų seka, kurią galėjome traktuoti kaip paprastą metinę rentą, buvo išreiškiama parametrais *R; n; i*. Bendrajai rentai apibrėžti dar reikėjo parametrų *p* ir *m*. Paprastai šių parametrų vertės yra numatomos kontrakto sąlygose. Minėtų parametrų pakanka, kad galėtume apskiačiuoti rentos sukauptą sumą bei dabartinę vertę. Tačiau, sudarant kontraktus, taip pat ir kitoms situacijoms pasitaiko atvejų, kai pateikiama viena iš šių charakteristikų (*A* arba *S*) ir nepilnas anksčiau minėtų parametrų sąrašas. Tokiais atvejais reikia nustatyti trūkstamas parametrų vertes. Panagrinėkime šių uždavinių sprendimų būdus.

<u>Rentos nario radimas</u>. Kartais būna reikalinga nustatyti rentos narį *R*, kai yra duota rentos trukmė *n*, palūkanų norma i ir sukaupta suma $S_{n;i}$ arba dabartinė rentos vertė $A_{n;i}$. Šiuo atveju galimi du užduoties sprendimo būdai, priklausomai nuo to, koks dydis duotas pradinėse sąlygose - sukaupta suma ar dabartinė vertė.

Tarkime, kad turime skolą grąžinti tam tikru laiko momentu ateityje ir tos skolos padengimui įnešamų per *n* metų įmokų pagalba bus sukurtas specialus fondas, kuriam bus priskaičiuojamos palūkanos. Matyt, būtų logiška, kad grąžintina suma - tai sukaupta rentos vertė. Ir tokios rentos narį mes galime surasti pagal (4.1) formulę:

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}. \tag{4.34}$$

Jeigu einamąją skolą galima mokėti kasmetiniais pastoviais mokėjimais, tuomet skolos dydį galima prilyginti dabartinėi rentos vertei A. Tuomet vienkartinę įmoką galima apskaičiuoti taip:

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}. \tag{4.35}$$

<u>4.11 pavyzdys</u>. Reikia apskaičiuoti pastovių įmokų apimtį, jei priskaičiuojama 8% metinių palūkanų tokiems atvejams:

a) norint po penkerių metų sukaupti 1 mln. litų fondą;

b) norint padengti 1 mln. litų einamąją skolą įmokomis per penkerius metus.

a) Sudaromo fondo apimtį prilyginsime paprastos metinės rentos su parametrais *n*=5, *i*=8%, sukauptai sumai. *R* - nežinomasis. Taigi pagal (4.1) formulę gausime:

$$R = \frac{S}{s_{5;8}} = \frac{1000000}{5.87} = 170456\ Lt.$$

b) norint padengti einamąją skolą per penkis metus pastoviais metiniai įnašais R, šią skolą prilyginame rentos dabartinei vertei. Taigi pagal (4.18) formulę gausime:

$$R = \frac{1000000}{a_{5;8}} = \frac{1000000}{3.993} = 250456\ Lt. \qquad [11]$$

<u>Rentos trukmės nustatymas</u>. Būtinybė nustatyti rentos trukmę (o kartu ir mokėjimų skaičių) pirmiausia iškyla nustatant kontraktų sąlygas. Rentos trukmė gali nūti nustatyta, jeigu duoti kiti rentos parametrai ir, be to, pateikta sukaupta rentos suma arba dabartinė rentos vertė. Paprastos metinės rentos atveju pagal (4.1) ir (4.18) formules, randame:

$$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R} \times i + 1\right)}{ln(1 + i)} \qquad (4.41)$$

arba
$$n = \frac{ln\left(1 - \frac{A}{R} \times i\right)^{-1}}{ln(1 + i)} \qquad (4.36)$$

Pasinaudodami atitinkamomis formulėmis galime sudaryti rentos trukmės nustatymo lentelę (žr. 4.3 lent.). Rentoms, kurioms palūkanos priskaičiuojamos tolydžiai, turėsime:

paprastai metinei rentai:

$$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R} \times (e^{\delta} - 1) + 1\right)}{\delta} \qquad (4.46)$$

arba
$$n = \frac{-ln\left(1 - \frac{A}{R} \times (e^{\delta} - 1)\right)}{\delta}. \qquad (4.47)$$

p-kartinei rentai

$$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R} \times p \times (e^{\delta/p} - 1) + 1\right)}{\delta} \qquad (4.48)$$

arba
$$n = \frac{-ln\left(1 - \frac{A}{R} \times p \times (e^{\delta/p} - 1)\right)}{\delta}. \qquad (4.49)$$

Įvertinant rentos trukmę, reikia atsižvelgti į tokius momentus:

1. Apskaičiuotos rentos trukmės n paprastai būna trupmeninės, todėl reikia imti artimiausią sveiką $[n]$ skaičių. Jeigu turime p-kartinę rentą, tai reikia suapvalinti iki $[np]$.

Pavyzdžiui, jeigu n = 6,28, tai ketvirtinei rentai (p = 4) np = 6,28 × 4 = 25,12, tai [np]=25, o iš čia n=25 / 4 = 6,25.

Kadangi įvertinta rentos trukmė yra apvalinama iki sveiko skaičiaus, kuris visada mažesnis už įvertintąjį, todėl tiek sukaupta rentos suma tiek ir dabartinė rentos vertė gaunamos šiek tiek mažesnės už iš anksto pasirinktas. Jeigu toks supaprastinimas yra priimtinas vadovaujantis bendromis finansinėmis sąlygomis, tai tuomet reikia numatyti, kaip kompensuoti susidariusį skirtumą. Pavyzdžiui, tai galima padaryti atliekant rentos pradžioje vienkartinį įnašą arba padidinant rentos narį.

Rentos turkmės nustatymo formulės

4.3 lentelė

Įmokų skaičius per metus	Palūkanų priskaičiavimo skaičius per metus	Dabartinės rentos dydis (A)	Sukaupta rentos suma (S)
p=1	m=1	$n = \frac{ln\left(1-\frac{A}{R}i\right)^{-1}}{ln(1+i)}$ (4.36)	$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{ln(1+i)}$ (4.41)
	m>1	$n = \frac{ln\left(1-\frac{A}{R}((1+i/m)^{m}-1)\right)^{-1}}{m\,ln(1+i/m)}$ (4.37)	$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R}((1+i/m)^{m}-1)+1\right)}{m\,ln(1+i/m)}$ (4.42)
p>1	m=1	$n = \frac{ln\left(1-\frac{A}{R}p((1+i)^{1/p}-1)\right)^{-1}}{ln(1+i)}$ (4.38)	$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R}p((1+i)^{1/p}-1)+1\right)}{ln(1+i)}$ (4.43)
	m=p	$n = \frac{ln\left(1-\frac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\,ln(1+i/m)}$ (4.39)	$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R}j+1\right)}{m\,ln(1+i/m)}$ (4.44)
	m≠p	$n = \frac{ln\left(1-\frac{A}{R}p((1+i/m)^{m/p}-1)\right)^{-1}}{m\,ln(1+i/m)}$ (4.40)	$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R}p((1+i/m)^{m/p}-1)+1\right)}{m\,ln(1+i/m)}$ (4.45)

3. Iš pateiktų n skaičiavimo formulių, kai skaičiavimai atliekami pagal dabartinę rentos vertę A, matome, kad n bus teigiamas ir baigtinis skaičius tuomet, kai bus įvykdytos šios sąlygos:

(4.36) formulei: $R > A \times i$;

(4.37) formulei: $R > A \times j/m \times s_{m;j/m}$;

(4.38) formulei: $R > A \times p[1 + j/m)^{m/p} - 1]$;

(4.39) formulei: $R > A \times j$;

(4.47) formulei: $R > A \times (e^{\delta} -1)$;

(4.49) formulei: $R > A \times p(e^{\delta/p} - 1)$.

Kitaip tariant, jeigu A yra dabartinė (dabartinė) rentos, dengiamos pastoviais mokėjimais, vertė, tai renta bus baigtinė tik tuomet, kai bus įvykdytos visos anksčiau monėtos sąlygos. Jeigu (4.37) lygybėje $R=A \times i$, tai $n= \infty$ ir turime begalinę rentą - skola praktiškai nepadengiama. Ir pagaliau jeigu $R<A \times i$ - tai reiškia, kad priskaičiuoti likusiai skolos daliai procentai viršija dengiamų įmokų R dydį ir renta negali būti padengta esant tokiam R.

<u>4.12 pavyzdys</u>. Pritraukiamų investicijų suma lygi 10 mln. litų. Numatomas kasmetinis pelnas turėtų sudaryti po 1 mln. litų (gaunamas metų pabaigoje). Per kiek laiko investicijos atsipirks, jei skolai priskaičiuojama 6% metinių palūkanų?

Kadangi $A \times i=0,6 < R = 1$, tai su kasmetiniu 1 mln. litų įnašu skolą bus galima padengti:

$$n = \frac{ln\left(1 - \frac{10}{1 \times 0.06}\right)^{-1}}{ln 1.06} = 15.72 \text{ metų}.$$

Suapvalinkime rentos trukmę iki $[n]$=15 metų. Tačiau tuomet $A_{15;6}$=9712249 litams. 287751 litų skirtumą arba reikia iš karto išmokėti, arba padidinti rentos narį R. Pastaruoju atveju R bus lygus:

$$R = \frac{10}{a_{15;6}} = 1.03 \; mln.\; Lt. \qquad [12]$$

<u>Palūkanų normos nustatymas</u>. Projektuojama palūkanų normos vertė turi labai svarią įtaką finansiniams sandoriams. Išankstinė palūkanų normos įvertinimo būtinybė iškyla jau kontrakto sudarymo metu.

Palūkanų normos nustatymo, kai duoti kiti rentos parametrai ir $S_{n;i}$ arba $A_{n;i}$ problema yra pakankamai sudėtinga. Netgi paprasčiausiu atveju, kai turime paprastą metinę rentą ir kai reikia spręsti šias lygtis i atžvilgiu:

$$A = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

arba $$S = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Nesunku suvokti, kad šios lygtys neturi tiesioginio algebrinio sprendimo. Šios problemos sprendimui skirta daug tiek matematinio, tiek matematinio-finansinio pobūdžio darbų. Tai įvairūs interpoliaciniai, tarp jų ir stygos bei Niutono - Rafsono metodai. Nors naudojantis kompiuteriniu servisu reikiamo tikslumo sprendinio paieška nesudaro didesnių problemų.

<u>Linijinė interpoliacija.</u> Palūkanų normos lygio, priklausomai nuo duoto finansinės rentos kaupimo koeficiento arba diskontavimo koeficiento (4.2) ir (4.17), vertinimui, taikytina interpoliacinė formulė:

$$i = i_a + \frac{a - a_a}{a_v - a_a} \times i_v - i_a, \tag{4.48}$$

kur a_v ir a_a - kaupimo koeficiento arba diskontavimo koeficiento reikšmės palūkanų normoms i_v ir i_a;

a - kaupimo koeficientas arba pateikimo koeficientas, kurių reikšmės gautos pagal pradinius duomenis S/R ir A/R.

Jei palūkanų priskaičiavimas vykata m kartų per metus, tai paprasčiau i reikšmę rasti pagal (4.48) formulę, o po to, naudojant (2.9) santykį, rasti ieškomą dydį j.

i (arba j) vertės, gautos pagal interpoliacinę formulę, truputį skiriasi nuo tikslių šio dydžio reikšmių. Jei i randamas pagal pradinius A ir R, tai gauta vertė truputį didesnė už tikslią. Savo ruožtu i vertė, rasta pagal S ir R, truputį mažesnė už tikslią. Paklaida vertinant normą pagal interpoliacinę formulę mažėja, mažėjant i_v - i_a diapazonui, apimančiam ieškomą palūkanų normos reikšmę.

<u>4.13 pavyzdys.</u> Per 7 metus reikia sudaryti fondą, lygų 1 mln. Lt Tarkim, kad tam išskiriama po 100 tūkst. Lt kasmet. Kokia turi būti palūkanų norma, pagal kurią įnašams priskaičiuojamos palūkanos, norint sudaryti fondą per duotą laikotarpį?

Panagrinėsim keletą išmokėjimų sąlygų ir palūkanų priskaičiavimo variantų.

a) Įnašai ir palūkanų priskaičiavimai metų gale. Augimo koeficientas, nustatomas užduoties sąlygomis, $s_{7;\,i} = S/R = 1000/100 = 10$. Tarkime, kad i reikšmė yra diapazone nuo 11% iki 12%. Tokiu būdu $i_v = 0.12$ ir $i_a = 0.11$, atitinkamai $s_v = s_{7;\,12} = 10.089012$, $s_a = s_{7;\,11} = 9.783274$. Palūkanų normų reikšmės parinktos teisingai, kadangi $s_{7;\,11} < s_{7;\,i} < s_{7;\,12}$. Pagal (4.48) gausime:

$$i = 0.11 + \frac{10 - 9.783274}{10.089012 - 9.783274} \times (0.12 - 0.11) = 0.11709.$$

Patikrinimas: pagal (4.2) formulę randame $s_{7;\ 11.709}$ = 9.999, tokiu būdu norma 11.709% praktiškai užtikrina iškeltų sąlygų išpildymą (*S/R* = 10).

b) Įnašai kasmetiniai, palūkanų priskaičiavimas 4 kartus metuose. Tuo atveju, naudodami anksčiau gautą atsakymą *i* = 0.11709, pagal (2.9) formulę randame

$j = 4\ (1.11709)^{1/4} - 1) = 0.11227.$

Patikrinimas: iš (4.5) formulės randame $s_{mn;\ j/m} = s_{28;\ 11227/4}$ = 9.9989.

c) Įnašai vykdomi kas ketvirtį. Kaupimo koeficientas pagal užduotas sąlygas $s_{7;i}^{(4)} = 10$. Pagal (4.8) formulę randame $s_v = s_{7;12}^{(4)} = 10.532303$. ir s_a = $s_{7;11}^{(4)} = 10.1780058$. Kadangi $s_a > s_{7;\ i}$ = 10, tai truputį sumažinsime apatinę intervalo ribą palūkanų normai. Tegul dabar i_a = 0.10. Dabar palūkanų normų intervalas lygus 10 - 11% ir, tada:

$s_a = s_{7;\ 10} = 9.835877$, $s_v = s_{7;\ 11}$, iš kur

$$i = 0.10 + \frac{10 - 9.835877}{10.178058 - 9.835877} \times (0.11 - 0.1) = 0.1048.$$

Patikrinimas: $s_{7;10.48}^{(4)} = 9.9989$. Rezultatas artimas duotai kaupimo koeficiento reikšmei $s_{7;i}^{(4)} = 10$. [13]

<u>Niutono - Rafsono metodas</u>. Priminsim, kad šio metodo pagalba iteraciniu krliu (nuosekliu priartėjimu) išsprendžiama lygybė *f*(*x*) = 0. Bendras rekurentinio santykio vaizdas:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

kur $f'(x_k)$ - kiekybinė išvestinės funkcijos *f*(*x)* reikšmė, kai $x = x_k$;

k - iteracijos numeris.

Pradinė x_0 reikšmė randama bandymų ir klaidų metodu.

Funkcija, reikalinga palūkanų normų vertinimui, sudaryta dviem pradinių sąlygų variantams: kada užduotas yra sukauptos rentos sumos ir mokėjimo metinės sumos santykis (*S:R*) arba rentos dabartinės vertės santykis su ta pačia suma (*A:R*). Pirmas santykis lygus kaupimo koeficientui $s_{n;\ i}$ (arba $s_{n;i}^{(p)}$, antras - pateikimo koeficientui $a_{n;\ i}$ (arba $a_{n;i}^{(p)}$). Pradėsime nuo pirmo varianto. Nagrinėjama funkcija duotu atveju atrodo taip:

$$\frac{S}{R} - \frac{(1+i_k)^n - 1}{i_k} = 0.$$

Patogumo sumetimais vertinsim ne *i*, o *q* = 1 + *i* reikšmę, tada:

$$f(q) = \frac{S}{R} - \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0.$$

Žemiau pateikiamos funkcijos $f(q)$ ir jų išvestinės, reikalingos šio metodo taikymui, vertinant q metinėms ir p - kartinėms rentoms su mokėjimais periodų gale ir palūkanų priskaičiavimu vieną kartą per metus:

metinei rentai:

$$f(q_k) = q_k^n - \frac{S}{R}(q_k - 1) - 1; \tag{4.49}$$

$$f'(q_k) = nq_k^{n-1} - \frac{S}{R}. \tag{4.50}$$

p - kartinė renta:

$$f(q_k) = q_k^n - \frac{S}{R} p(q_k^{1/p} - 1); \tag{4.51}$$

$$f'(q_k) = nq_k^{n-1} - \frac{S}{R}(q_k^{1/p}). \tag{4.52}$$

kur q_k - q reikšmė k - ajai iteracijai.

Pradinę reikšmę $q_0 = 1 + i_0$ parenkame taip, kad $s_{n;i_0}$ (arba $s_{n;i_0}^{(p)}$) būtų kiek galima artimesnė duotam santykiui S/R.

Jei renta numato m - kartinį palūkanų priskaičiavimą pagal nominalią normą j, tai reikia įvertinti metinę normą i ir pagal (2.9) formulę paskaičiuoti j.

i įvertinimo tikslumo nustatymui arba rezultato patikrinimui reikia paskaičiuoti kaupimo koeficientą $s_{n;i_k}$ (arba $s_{n;i_k}^{(p)}$) ir palyginti su pradiniu dydžiu S/R.

<u>4.14 pavyzdys.</u> Paskaičiuosime i ***4.13 pavyzdžio*** (*variantas a*) sąlygomis. Kadangi duota, kad $S/R = 10$, tai $s_{7;\,i} = 10$. Parenkam q_0 sekančiu būdu: randam lentelinę i reikšmę, kuriai esant $s_{7;\,i}$ bus kiek galima artimesnė 10. Tokia reikšmė yra 11%. Atitnkamai $q_0 = 1.11$. Toliau randame pagal (4.49) ir(4.50) formules:

$$f(1.11) = 1.11^7 - 10(1.11 - 1) - 1 = -0.02384;$$

$$f'(1.11) = 7 \times 1.11^{7-1} - 10 = 3.0929.$$

Iš kur:

$$q_1 = 1.11 - \frac{-0.02384}{3.0929} = 1.1177 \text{ ir } i_1 = 11.77\%.$$

Patikrinimas: $s_{7;\ 11.77}$= 10.018 > 10. Tarkime, kad toks tikslumo laipsnis mūsų nepatenkina. Tada atliksime antrąją iteraciją:

$f(1.1177) = 0.0021;\ f'(1.1177) = 3.6474;$

$$q_2 = 1.1177 - \frac{-0.021}{3.6474} = 1.1171 \text{ ir } i_2 = 11.71\%.$$

Patikrinimas: $s_{7;\ 11.71}$ = 10.0001. Antroji iteracija davė jau didelį tikslumo laipsnį.

Tegul, kaip ir anksčiau, $S{:}R$ = 10, n = 7, tačiau įnašai vykdomi kas ketvirtį. Tada p = 4 ir įstatę q_0 = 1.11, randame:

$f(1.11) = 1.11^7 - 10 \times 4(1.11^{1/4} - 1) - 1 = 0.0188;$

$f'(1.11) = 7 \times 1.11^6 - 10 \times 1.11^{1/4-1} = 3.8457;$

$$q_1 = 1.11 - \frac{0.0188}{3.8457} = 0.1051.$$

Patikrinimas: $s^{(4)}_{7;10.54} = 10.0089.$

Antra iteracija:

$f(1.1051) = 0.0009;\ f'(1.1051) = 3.472,$

$$q_2 = 10.0089 - \frac{0.0009}{3.472} = 0.1048.$$

Patikrinimas: $s^{(4)}_{7;10.48} = 9.9986.$ [14]

Pereisime prie i vertinimo, kada duotas santykis $A{:}R$. Pradinė funkcija šiuo atveju užrašoma taip:

$$\frac{A}{R} - \frac{1 - q^{-n}}{q - 1} = 0.$$

Iš kur randame:

metinė renta:

$$f(q_k) = q_k^{-n} + \frac{A}{R}(q_k - 1) - 1. \tag{4.53}$$

$$f'(q_k) = \frac{A}{R} - nq_k^{-(n+1)}; \tag{4.54}$$

p - kartinė renta

$$f(q_k) = q_k^{-n} + \frac{A}{R} \times p(q_k^{1/p} - 1) - 1; \qquad (4.54)$$

$$f'(q_k) = \frac{A}{R}(q_k^{1/p-1}) - nq_k^{-(n+1)}. \qquad (4.56)$$

Pradinės reikšmės $q_0 = 1 + i_0$ parenkamos taip, kad $a_{n;i_0}$ (arba $a_{n;i_0}^{(p)}$) būtų artima duotam santykiui $A:R$.

Reikšmės i vertės tikslumo nustatymui reikia paskaičiuoti rentų pateikimo koeficientus $a_{n;i_k}$ (arba $a_{n;i_k}^{(p)}$) ir palyginti rezultatą su duotu dydžiu $A:R$.

4.15 pavyzdys. Koks investicijų pelningumas, išreikštas metine palūkanų norma, jei įnašai sudarė 1 mln. Lt, o kasmetinės 100 tūkst. Lt sumos pajamos gaunamos: a) kiekvienų metų gale; b) kiekvieno ketvirčio gale ? Bendras pajamų gavimo periodas 15 metų.

Investicijų sumą prilyginame dabartinei mokėjimų srauto, sudaryto iš pajamų rodiklių, vertei, tada santykis $A:R$ = 1000000:100000 = 10. Palūkanų normos pradinę reikšmę rasime pagal diskontavimo koeficiento, artimiausio 10, lentelinę reikšmę. 15 metų terminui artimiausios reikšmės 10 yra $a_{15;\,5.5}$ =10.037 ir $a_{15;\,6}$ =9.71. Priimsime i_0 =5.6, iš kur q_0 =1.056.

a) gaunant pajamas metų gale, randame pagal (4.53) ir (4.54) formules:

$$f(1.056) = 1.056^{-15} + 10(1.056 - 1) - 1 = 0.00161;$$

$$f'(1.056) = 10 - 15 \times 1{,}056^{-16} = 3.7271;$$

$$q_1 = 1.056 - \frac{0.00161}{3.7271} = 1.0557 \text{ ir } i_1 = 5.57\%.$$

Patikrinimas: $a_{15;\,5.57}$ = 9.991. Tarkime, kad toks tikslumas neatitinka reikalavimų.

Antrai iteracijai randame:

$$f(1.0557) = 0.0005;\ f'(1.0557) = 3.6985;\ q_2 = 1.05556,\ i_2 = 5.556\%.$$

Patikrinimas: $a_{15;5.556}$ = 10.0003.

b) Funkcijų reikšmes tokiomis sąlygomis randame pagal (4.55) ir (4.56) formules. Normos i_0 pradinio lygio įvertinimui rasime keletą reikšmių $a_{15;i}^{(4)}$, žr. (4.21). i = 5.5, $a_{15;5.5}^{(4)} = 10.24$; i = 5.0, $a_{15;6}^{(4)} = 9.93$. Kadangi $a_{15;i}^{(4)} = 10$, tai parenkame i reikšmę, kuri artimesnė i = 6%. Tegul i_0 = 5.9%, tada:

$$f(1.059) = 1.059^{-15} + 10 \times 4(1.059^{1/4} - 1) - 1 = 0.00059;$$

$$f'(1.059) = 10 \times 1.059^{1/4-1} - 15 \times 1.059^{-16} = 3.5846;$$

$$q_1 = 1.059 - \frac{0.00059}{3.5846} = 1.05883 \text{ ir } i_1 = 5.883\%.$$

Patikrinimas: $a^{(4)}_{15;5.883} = 10.0003.$ [15]

Tegul finansinė renta numato nenutrūkstamą palūkanų priskaičiavimą arba nenutrūkstamą diskontavimą pagal δ normą. Jei, kaip išeities parametras duotas santykis *S/R*, tai reikalingą mums funkciją galima užrašyti išraiška:

$$\frac{S}{R} - \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = 0.$$

Atitinkamai *metinei rentai*:

$$f(\delta) = e_k^{\delta n} - \frac{S}{R}(e_k^{\delta} - 1) - 1; \tag{4.57}$$

$$f'(\delta) = ne_k^{\delta n} - \frac{S}{R} \times e_k^{\delta}. \tag{4.58}$$

p - kartinė renta:

$$f(\delta) = e_k - \frac{S}{R} p(e_k - 1) - 1; \tag{4.59}$$

$$f'(\delta) = ne_k^{\delta n} - \frac{S}{R}(e_k^{\delta/p}). \tag{4.60}$$

kur e_k^{δ} - e^{δ} reikšmė *k* - ajai iteracijai.

Tokiems atvejams, kai pradiniu yra santykis *A:R*, iš karto gausime:

metinei rentai

$$f(\delta) = e_k^{-\delta n} + \frac{A}{R}(e_k^{\delta} - 1) - 1; \tag{4.61}$$

$$f'(\delta) = \frac{A}{R} e_k^{\delta} - ne^{-\delta n}. \tag{4.62}$$

p - kartinė renta:

$$f(\delta) = e_k^{-\delta n} + \frac{A}{R} p(e_k^{\delta/p} - 1) - 1; \tag{4.63}$$

$$f'(\delta) = \frac{A}{R}(e_k^{\delta/p}) - ne_k^{-\delta n}. \tag{4.64}$$

Pradinę augimo jėgos (galios) reikšmę δ_0 parenka taip, kad $s_{n;\delta_0}$ (arba $a_{n;\delta_0}$) būtų artimos duotiems santykiams *S/R* (arba *A/R*).